МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«ХАРКІВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

В. Д. Дмитрієнко, О. Ю. Заковоротний
В. І. Носков

ЗАСОБИ ТА АЛГОРИТМИ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ

Навчально-методичний посібник до практичних занять для студентів денної та заочної форм навчання за напрямками «Комп'ютерна інженерія» та «Комп'ютерні науки»

Затверджено
редакційно-видавничою
радою університету НТУ «ХПІ»,
протокол № 1 від 07.06.2013 р.

Харків
Вид. центр «НТМТ»
2013

УДК 004.021
ББК 32.973-02
Д 53

Рецензенти: *Б. І. Кузнецов*, д-р. техн. наук, професор, Науково-технічний центр магнетизму технічних об’єктів НАН України (м. Харків);

О. А. Серков, д-р. техн. наук., професор, заслужений винахідник України, академік Академії наук прикладної радіоелектроніки, НТУ «ХПІ».

Дмитрієнко В. Д. Засоби та алгоритми прийняття рішень /
Д 53 В. Д. Дмитрієнко, О. Ю. Заковоротний, В. І. Носков: навчально-методичний посібник до практичних занять. –Х.: НТМТ, 2013. – 76 с.

ISBN 978-617-578-140-1

У навчально-методичному посібнику наведено 8 практичних занять з різних методів і алгоритмів прийняття рішень. На початку кожного заняття викладено теоретичні основи досліджуваних методів або алгоритмів прийняття рішень у техніці або економіці. Практичні заняття добре проілюстровані прикладами, кожне заняття має індивідуальні завдання для студентів. У навчально-методичному посібнику докладно розглянуто критерії прийняття рішень в умовах невизначеності й ризику, методи оптимальної поведінки в умовах конфліктних ситуацій, які описуються за допомогою теорії ігор, методи прийняття рішень при використанні векторних критеріїв.

Призначено для студентів денної та заочної форм навчання за напрямками «Комп’ютерна інженерія» та «Комп’ютерні науки».

Табл. 20. Бібліогр. 14 назв.

УДК 004.021
ББК 32.973-02

ISBN 978-617-578-140-1

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ СКОРОЧЕНЬ

ЗПР	–	задача прийняття рішень;
ЕОМ	–	електронна обчислювальна машина;
МГВА	–	метод групового врахування аргументів;
ОПР	–	особа, яка приймає рішення;
ПЕОМ	–	персональна електронна обчислювальна машина;
$K_{\text{а.г}}$	–	критерій азартного гравця;
$K_{\text{Г}}$	–	критерій Гурвіца;
$K_{\text{Гер}}$	–	критерій Гермейєра;
$K_{\text{Гм}}$	–	модифікований критерій Гурвіца;
$K_{\text{доб}}$	–	критерій добутків;
$K_{\text{мм}}$	–	максимінний критерій;
$K_{\text{н}}$	–	нейтральний критерій;
$K_{\text{н.ш}}$	–	нейтральний критерій на шкодуваннях;
$K_{\text{сс.ш}}$	–	критерій суб'єктивно-середніх шкодувань;
K_{BL}	–	критерій Байєса – Лапласа;
K_{HL}	–	Ходжа – Лемана;
K_{MD}	–	критерій мінімуму дисперсії оцінного функціоналу;
K_{S}	–	критерій Севіджа;
$K_{\text{Х}}$	–	критерій Хоменюка;
α	–	нижня чиста ціна гри;
β	–	верхня чиста ціна гри;
v	–	ціна матричної гри.

ВСТУП

Прийняття рішень – найважливіша сторона людської діяльності. Вибір однієї альтернативи з декількох, з великої, але скінченної множини альтернатив або навіть із нескінченної множини можливих рішень пронизує все людське життя. Більшість щоденних рішень людина приймає майже автоматично, спираючись на свій життєвий досвід. Частина рішень, які вважаються людиною другорядними, оцінюються й вибираються інтуїтивно, без серйозного аналізу альтернатив та наслідків, що з них випливають. І, нарешті, існують важливі проблеми прийняття рішень, часто в унікальних ситуаціях, які потребують тривалих роздумів при пошуку раціонального або кращого рішення в умовах значної кількості альтернатив, суперечливих вимог і невизначеності майбутньої ситуації.

Проблеми прийняття рішень у нестандартних або унікальних ситуаціях завжди існували в техніці, людському суспільстві, при управлінні як окремими підприємствами або організаціями, так і державами, у міждержавних відносинах. Пошук прийнятного рішення в унікальних ситуаціях завжди був і залишається певною мірою мистецтвом, за своєю складністю порівнянним із мисленням. Однак існує й добре розроблена теорія прийняття рішень, що акумулювала в собі досвід багатьох поколінь людей і що дозволяє правильно розв'язувати типові задачі прийняття рішень, особливо в тих випадках, коли бажання особи, що приймає рішення, не хочуть ураховувати його можливостей. Ця теорія занадто велика, щоб її можна було розглянути в невеликому навчально-методичному посібнику, тому обмежимося тільки задачами, у яких «прийняття рішень» розуміють як одноразовий або багаторазовий акт вибору із заданої множини альтернатив однієї або декількох кращих, або оптимальних. Під таке обмеження потрапляє множина різноманітних задач прийняття рішень, пошук кращих альтернатив у яких, як правило, не є тривіальним. Крім того, процес пошуку кращих альтернатив у багатьох більш складних задачах можна подати як послідовність розв'язання зазначених задач. Не менш важливе й те, що знайомство із загальними методами й визначенням кращих альтернатив у багатьох конкретних задачах прийняття рішень (ЗПР) дозволить уникнути й типових помилок, що часто виникають при прийнятті різних рішень:

- не готуватися вчасно до розв’язання ЗПР або приймати складні рішення, не враховуючи можливі наслідки;
- приймати егоїстичні рішення, не враховуючі інтереси оточення (партнерів, союзників, конкурентів та навіть ворогів);
- приймати «геніальні» або емоційні рішення, покладаючись на інтуїцію та натхнення або на підставі настрою або симпатій;
- приймати самовдоволені та самовпевнені рішення, не прислухаючись до думки інших;
- приймати нерозумні та уперті рішення, які вже призводили до поганих наслідків.

Мета цього видання – розкрити математичні проблеми сучасної теорії прийняття рішень, навчити студента при розв’язанні конкретних задач оптимально використовувати наявну інформацію, оцінювати всі можливі альтернативи та вибирати серед них найкращі.

1. КЛАСИЧНІ КРИТЕРІЇ ДЛЯ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ В УМОВАХ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ

1.1. Математичні моделі задач прийняття рішень

Будь-яка математична модель задачі прийняття рішення є формальним описом мети, засобів та результатів, а також способу зв'язку засобів із результатами. Для формального опису засобів та результатів можна задати дві множини: множину $X = \{x_1, ..., x_n\}$, елементи якої надалі будемо називати альтернативами, й множину $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$, елементи якої будемо називати результатами. Альтернативи – це те, що вибирає особа, яка приймає рішення, а результати – те, до чого вони приводять, при конкретному стані зовнішнього середовища.

У задачах прийняття рішень зі скінченними множинами X й A існує кілька видів зв'язку результатів від альтернатив.

Найбільш простий вид зв'язку альтернатив із результатами полягає в тому, що кожна альтернатива приводить тільки до одного результату. У цьому випадку існує функціональна залежність результатів від альтернатив.

Другий вид зв'язку випливає із припущення, що кожна з альтернатив може привести до одного результату a_k з деякої множини A ($a_k \in A$) результатів, кожний з яких має певну імовірність появи. У цьому випадку має місце стохастична залежність результатів від альтернатив.

При третьому виді зв'язків альтернатив і результатів кожна з альтернатив також може привести до одного з декількох результатів, однак при цьому не відома навіть стохастична залежність між результатами та альтернативами.

При цьому отриманий результат (стан деякої конкретної системи) визначається двома факторами: вибором альтернативи, що здійснює особа, яка приймає рішення (ОПР), та станом зовнішнього середовища. Тому кожен результат $a_{ij} \in A$ є функцією двох аргументів: $a_{ij} = F(x_i, y_j)$, де x_i ($x_i \in X$) – обрана альтернатива; y_j ($y_j \in Y$) – стан зовнішнього середовища.

При першому виді зв'язку альтернатив із результатами вважають, що рішення приймається в умовах визначеності, у другому – у стохастичних умовах (умовах ризику), а в третьому – в умовах невизначеності.

Інформованість ОПР про зв'язок альтернатив із результатами може не збігатися з об'єктивно існуючим зв'язком. Наприклад, об'єктивно існує стохастична залежність результатів від альтернатив, але ОПР при виборі кожної конкретної альтернативи не знає імовірностей настання результатів, тому для ОПР умови прийняття рішення необхідно класифікувати як умови невизначеності. Таким чином, зазначена класифікація задач прийняття рішень пов'язана із суб'єктом.

Наочно зв'язок між альтернативами та результатами можна навести за допомогою функції реалізації $F(x, y)$. Ця функція зіставляє з кожною парою (альтернатива, стан середовища) обумовлений нею результат. Якщо множина альтернатив та множина станів середовища скінченні, то зручно наводити функцію реалізації F у вигляді таблиці (табл. 1.1). Ця таблиця для конкретних задач, що розглядаються, визначає всі їх можливі рішення, тому її часто називають матрицею рішень. Ці рішення (результати, наслідки) повинні допускати кількісну оцінку, і ми будемо для простоти ототожнювати ці оцінки з відповідними результатами.

Таблиця 1.1 – Табличний вигляд функції реалізації

$F(x, y)$	y_1	...	y_j	...	y_m
x_1	$a_{11} = F(x_1, y_1)$	...	$a_{1j} = F(x_1, y_j)$	....	$a_{1m} = F(x_1, y_m)$
...	...	...	...	...	...
x_i	$a_{i1} = F(x_i, y_1)$	...	$a_{ij} = F(x_i, y_j)$	...	$a_{im} = F(x_i, y_m)$
...	...	...	...	...	...
x_n	$a_{n1} = F(x_n, y_1)$	...	$a_{nj} = F(x_n, y_j)$	...	$a_{nm} = F(x_n, y_m)$

Розглянемо матрицю рішень при різній поінформованості ОПР про можливості появи тих або інших станів зовнішнього середовища.

1. ОПР знає стан зовнішнього середовища, тоді результат (значення функції реалізації) залежить тільки від обраної ОПР альтернативи, тобто одержуємо задачу прийняття рішення в умовах визначеності. У цьому випадку таблиця вибудовується в один стовпець, який відповідає стану середовища на момент часу, що розглядається.

2. ОПР знає імовірності q_j $(\sum_{j=1}^{m} q_j = 1)$ появи кожного стану y_j $(j = \overline{1, m})$ зовнішнього середовища. У цьому випадку, якщо обрано альтернативу x_i, то для кожного результату $a_k \in A$ можна знайти

імовірність p_k його настання. Для цього потрібно відзначити в i-му рядку табл. 1.1 всі клітинки, де знаходиться результат a_k, і просумувати імовірності відповідних стовпців. Таким чином, кожній альтернативі на множині результатів відповідає імовірнісна міра, а отже, у цьому випадку маємо задачу прийняття рішення в стохастичних умовах.

3. ОПР має тільки табл. 1.1 та не знає навіть імовірностей появи станів зовнішнього середовища, тобто при виборі альтернативи x_i вона знає лише про можливості настання одного з результатів, що знаходиться в i-му рядку таблиці. Одержуваний результат визначається двома факторами: вибором альтернативи, що здійснює ОПР, і станом зовнішнього середовища. Прийняття рішення в цьому випадку здійснюється в умовах невизначеності.

1.2. Класичні критерії прийняття рішень в умовах невизначеності

1.2.1. Максимінний критерій (критерій Вальда)

Припустимо, що ми не маємо інформації про імовірності появи станів зовнішнього середовища. У цьому випадку одним з основних підходів до прийняття рішень (вибору альтернативи) є введення гіпотез про поведінку середовища. Гіпотеза, що вводиться, має дозволяти для кожної альтернативи кількісно оцінити пов'язані з нею наслідки і, таким чином, порівнювати будь-які дві альтернативи. Однією з найважливіших гіпотез такого типу є гіпотеза антагонізму. Вона випливає з припущення, що середовище щодо ОПР поводиться якнайгірше. Після прийняття гіпотези антагонізму кожна альтернатива оцінюється результатом, що має найгірше числове значення для цієї альтернативи. Якщо матриця рішень для розглянутої задачі прийняття рішень є матрицею виграшів, то кожна альтернатива оцінюється результатом, що дає найменший виграш. Якщо матриця рішень є матрицею програшів, то кожна альтернатива оцінюється результатом, що дає найбільший програш.

Будемо розглядати випадок, коли матриця рішень (див. табл. 1.1) є матрицею виграшів і кожна альтернатива x_i $(i=\overline{1,n})$ оцінюється результатом, що дає найменший виграш: $\min\limits_j a_{ij}$, $j=\overline{1,\,m}$. Кращою альтернативою є та, у якої мінімальний елемент – найбільший. Формально це означає, що оптимальною альтернативою є i-та альтернатива, що дає екстремум виразу

$$K_{\text{мм}} = \max_i \min_j a_{ij}. \qquad (1.1)$$

Такий принцип визначення рішення називається принципом максиміну, а альтернатива, на якій досягається максимум у виразі (1.1), – максимінною. Саме вираз (1.1) називають максимінним критерієм.

***Значення принципу максиміну*:**

По-перше, максимінний підхід описує дуже розповсюджений випадок поведінки, при якому дві сторони мають протилежні цілі й, отже, можуть розглядатися як конкуренти (антагоністи).

По-друге, число $\min_j a_{ij}$, яке являє собою одну з найважливіших характеристик альтернативи x_i, є її гарантованим рівнем, тобто при виборі альтернативи x_i будь-які події у зовнішньому середовищі не можуть призвести до результату, що гірший, ніж $\min_j a_{ij}$.

По-третє, $\max_i \min_j a_{ij}$ – це найбільший із гарантованих рівнів. У зв'язку із цим принцип максиміну називають також принципом найбільшого гарантованого результату, «тактикою від зворотного», тобто виходячи з того, щоб успіх був гарантований у найгірших умовах.

По-четверте, при прийнятті рішень в умовах невизначеності максимінний критерій або максимінна оцінка є єдиною абсолютно надійною оцінкою.

По-п'яте, цей критерій зазвичай застосовують ОПР, схильні до крайнього песимізму («Якщо неприємності можуть відбутися, то вони відбудуться»). Через це максимінний критерій називають також критерієм крайнього песимізму.

Обрані за допомогою максимінного критерію альтернативи повністю виключають ризик. Однак положення про відсутність ризику може коштувати великих втрат. Продемонструємо це на прикладі такої матриці виграшів (табл. 1.2).

Альтернатива x_1, на перший погляд, більш вигідна, однак максимінний критерій вибирає альтернативу x_2. При цьому виключається найменше значення a_{11} = 0,9, що реалізується при стані зовнішнього середовища y_1, і гарантується значення a_{21} = 1,0. Однак при стані зовнішнього середовища y_2 втрачається виграш a_{12} = 90, замість якого одержують виграш a_{22} = 1,0, що на два порядки менший.

Таблиця 1.2 – Матриця виграшів

$F(x, y)$	y_1	y_2	$\min\limits_j a_{ij}$	$\max\limits_i \min\limits_j a_{ij}$
x_1	0,9	90,0	0,9	–
x_2	1,0	1,0	1,0	1,0

Цей приклад показує, що в численних практичних ситуаціях песимізм максимінного критерію й відсутність розумного ризику можуть виявитися дуже невигідними.

1.2.2. Критерій азартного гравця (максимаксний критерій)

Інша можлива гіпотеза про поведінку зовнішнього середовища – середовище сприяє ОПР. У цьому випадку кожна альтернатива характеризується найбільш сприятливим результатом. При використанні матриці виграшів кожна альтернатива x_i $(i = \overline{1,n})$ оцінюється результатом, що дає найбільший виграш: $\max\limits_j a_{ij}$, $j = \overline{1, m}$. Кращою альтернативою є та, у якої максимальний елемент найбільший. Формально це означає, що оптимальною альтернативою є *i*-та альтернатива, що дає екстремум виразу

$$K_{\text{а.г}} = \max_i \max_j a_{ij}. \tag{1.2}$$

Таким чином, при використанні цього критерію робиться ставка на найбільш вигідний випадок, тобто ОПР поводиться як азартний гравець, який схильний до ризику й який є крайнім оптимістом. Тому цей критерій іноді називають і критерієм крайнього оптимізму.

1.2.3. Нейтральний критерій

Ще одне можливе припущення про поведінку зовнішнього середовища – середовище нейтральне до ОПР й, отже, всі стани зовнішнього середовища з'являються з однаковою імовірністю. У цьому випадку вигідно вибирати альтернативу, якій відповідає максимальне середнє значення

$$K_{\text{н}} = \max_i \left(\frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} \right). \tag{1.3}$$

Критерій (1.3) завдяки використовуваній гіпотезі дістав назву нейтрального критерію. Інші назви цього критерію: критерій Лапласа – Бернуллі, критерій недостатньої підстави. Вони пов'язані з принципом недостатньої підстави Лапласа – Бернуллі. Цей принцип рекомендує задавати імовірності станів об'єктів або природи однаковими, якщо немає підстав вважати, що які-небудь із цих станів більш або менш імовірні стосовно інших.

1.2.4. Критерій Гурвіца (критерій песимізму – оптимізму)

У цьому критерії зроблено спробу об'єднати переваги критерію азартного гравця та максимінного критерію. У результаті, отриманий критерій більше врівноважений, ніж критерій азартного гравця, та менш песимістичний, ніж максимінний критерій:

$$K_{\Gamma} = cK_{\text{мм}} + (1-c)K_{\text{а.г}} = \max_i (c \min_j a_{ij} + (1-c) \max_j a_{ij}), \tag{1.4}$$

де c – константа, що задовольняє умову $0 \le c \le 1$. При $c = 1$ критерій Гурвіца перетворюється у максимінний критерій, а при $c = 0$ – у критерій азартного гравця. Не існує яких-небудь простих рекомендацій з вибору значення константи c, тому в більшості випадків вважають, що $c = 0{,}5$.

Приклад 1.1. Володіння перевагами двох критеріїв не робить критерій Гурвіца безпомилковим при розв’язанні будь-яких задач. Як приклад, що підтверджує це твердження, розглянемо вибір кращої альтернативи для функції реалізації, наведеної у табл. 1.3.

Таблиця 1.3 – Функція реалізації

$F(x, y)$	y_1	y_2	…	y_{m-1}	y_m
x_1	1000	1	…	1	1
x_2	999	999	…	999	0,99

Критерій Гурвіца при будь-якому ваговому множнику c у розглянутій функції реалізації виділяє як кращу альтернативу x_1, хоча будь-яка ОПР із «здоровим глуздом» вибрала б альтернативу x_2.

1.2.5. Модифікований критерій Гурвіца

Аналіз прикладу 1.1 показує, що незадовільний вибір альтернативи x_1 за допомогою критерію Гурвіца пов'язаний із тим, що в цьому критерії не враховується середнє значення кожної альтернативи. Для подолання цього недоліку розглянутого критерію запропонований модифікований критерій Гурвіца

$$K_{\text{Гм}} = \max_{i \in I}(c \min_{j} a_{ij} + (1-c) \max a_{ij}), \tag{1.5}$$

де $i \in I$, якщо $K_i = \dfrac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} a_{ij} \geq K_{\text{зад}}$, тобто краща альтернатива вибирається тільки з тих альтернатив, у яких середнє арифметичне не гірше від заданого значення.

1.2.6. Критерій добутків

Критерій добутків $K_{\text{доб}}$ застосовується тільки до функцій реалізації з додатними елементами. Він визначається співвідношенням

$$K_{\text{доб}} = \max_{i} \prod_{j=1}^{m} a_{ij}, \quad a_{ij} > 0; \; i = \overline{1,n}; \; j = \overline{1,m}. \tag{1.6}$$

Якщо умова $a_{ij} > 0$ порушується, то тоді всі елементи функції реалізації збільшують на якусь константу a ($a > |\min_{i,j} a_{ij}|$). Константу a часто визначають співвідношенням $a = |\min_{i,j} a_{ij}| + 1$.

1.3. Контрольні запитання та завдання

1.3.1. Контрольні запитання

1. Структура задач прийняття рішень та їх класифікація.
2. Форми представлення задач прийняття рішень.
3. Способи формалізації мети в задачах прийняття рішень.
4. Пояснити принцип роботи критерія Вальда та значення принципу максиміну.
5. Пояснити принцип роботи критерія азартного гравця.

6. Пояснити функціонування нейтрального критерія та критерія добутків.

7. Похідні критерії. Критерій Гурвіца.

1.3.2. Завдання

1. Для заданого варіанта функції реалізації визначити кращі альтернативи за допомогою критеріїв (1.1) – (1.6).

2. Запропонувати й обґрунтувати свій унікальний критерій $K_{\text{студент}}$ для прийняття рішень в умовах невизначеності.

3. Продемонструвати працездатність вашого критерію на заданій і запропонованій вами функціях реалізації.

4. Розробити функцію реалізації, в якій критерії $K_{\text{мм}}, K_{\text{а.г}}$ виділять як кращу одну й ту саму альтернативу.

5. Розробити функцію реалізації, в якій критерії $K_{\text{мм}}, K_{\text{студент}}$ виділять як кращу одну й ту саму альтернативу.

2. КЛАСИЧНІ КРИТЕРІЇ ІЗ ШКОДУВАННЯМИ

2.1. Критерії із шкодуваннями для прийняття рішень в умовах невизначеності

2.1.1. Критерій Севіджа (або критерій мінімаксних шкодувань)

Критерій Севіджа визначається виразом

$$K_S = \min_i (\max_j (\max_i a_{ij} - a_{ij})). \tag{2.1}$$

Для розуміння цього критерію величини $d_{ij} = \max_i a_{ij} - a_{ij}$ можна трактувати як додаткові виграші (або як шкодування за недоотримані виграші). Ці виграші були б отримані, якби при стані зовнішнього середовища y_j замість альтернатив x_i ($i = \overline{1, n}$) було обрано альтернативу x_k ($k \neq i$), для якої справедливий вираз $a_{kj} = \max_i a_{ij}$, $i = \overline{1, n}$. Величини $d_{ij} = \max_i a_{ij} - a_{ij}$ можна трактувати і як штрафи, на які карається ОПР, що вибирає неоптимальні рішення. Фактично вихідна матриця виграшів $\|a_{ij}\|$ співвідношенням $d_{ij} = \max_i a_{ij} - a_{ij}$ перетворюється в матрицю $\|d_{ij}\|$ можливих додаткових виграшів або матрицю шкодувань, або матрицю штрафів за неправильні рішення. При прийнятті рішень в умовах невизначеності й припущенні, що середовище вороже, кожна альтернатива за допомогою співвідношення $\max_j d_{ij} = \max_j (\max_i a_{ij} - a_{ij})$ характеризується можливим максимальним штрафом або шкодуванням. Потім за допомогою операції мінімуму вибирається альтернатива, що мінімізує негативні наслідки при будь-яких можливих станах зовнішнього середовища.

Приклад 2.1. Нехай у процесі експлуатації ЕОМ виявилися збої. Необхідно прийняти рішення про подальше функціонування ЕОМ. Можливі такі варіанти рішень:

x_1 – повна перевірка ЕОМ;

x_2 – мінімальна перевірка;

x_3 – відмова від перевірки.

При цьому ЕОМ може перебувати в таких станах:

y_1 – несправностей немає, збої були випадковими;

y_2 – є незначні несправності, які несуттєво вплинуть на подальшу експлуатацію ЕОМ;

y_3 – є серйозні несправності, які спотворять результати обчислень й призведуть до виходу з ладу інших блоків.

Результати втрат у відносних одиницях від зупинки ЕОМ наведено в табл. 2.1. Вони включають витрати на перевірку й усунення несправностей, а також витрати, які пов'язані з втратами машинного часу через зупинку машини.

Таблиця 2.1 – Вихідна матриця

$F(x, y)$	y_1	y_2	y_3	$\min\limits_j a_{ij}$	$K_{мм}$
x_1	– 20	– 22	– 40	– 40	– 40
x_2	– 12	– 23	– 43	– 43	–
x_3	0	– 24	– 55	– 55	–

Використовуючи співвідношення $d_{ij} = \max\limits_i a_{ij} - a_{ij}$, $i, j = \overline{1,\ 3}$, де a_{ij} – елементи вихідної матриці (табл. 2.1), неважко визначити елементи d_{ij} матриці шкодувань (табл. 2.2), а потім й значення критерію Севіджа, що виділяє другу альтернативу як кращу.

Вибір альтернативи x_2 за відсутності несправностей ЕОМ (тобто при стані середовища y_1) призводить до втрат у 12 одиниць порівняно з альтернативою x_3. Якщо ж додаткові втрати будуть визначатися при y_2 або y_3, то при виборі альтернативи x_2 порівняно з альтернативою x_1 вони будуть становити відповідно одну й три одиниці, а загальні втрати при цьому становитимуть відповідно 23 й 43 одиниці.

Таблиця 2.2 – Матриця шкодувань

$F(x, y)$	y_1	y_2	y_3	$\max\limits_j d_{ij}$	K_S
x_1	20	0	0	20	–
x_2	12	1	3	12	12
x_3	0	2	15	15	–

Таким чином, якщо максимальний елемент стовпця матриці $\|a_{ij}\|$ не дорівнює нулю, то критерій Севіджа мінімізує додаткові втрати, не враховуючи загальний рівень втрат. Якщо у всіх стовпцях вихідної матриці максимальні втрати дорівнюють нулю, то вибір кращої альтернативи за допомогою критерію Севіджа більш-менш об'єктивний. Але якщо рівень загальних втрат великий, як у другому та третьому стовпцях матриці $\|a_{ij}\|$, де в другому стовпці базовий рівень втрат в 22 рази більший від додаткових втрат при виборі альтернативи x_2, то застосування критерію Севіджа може призводити до рішень, що суперечать «здоровому глузду». У розглянутому прикладі (див. табл. 2.1) при виборі альтернативи x_2 максимальні втрати можуть становити 43 одиниці, у той час як краща альтернатива x_1 за максимінним критерієм приводить до максимальних втрат тільки в 40 одиниць.

Правило вибору кращої альтернативи відповідно до критерію Севіджа можна інтерпретувати в такий спосіб. Будується нова матриця – матриця шкодувань $D=\|d_{ij}\|$. Елементи d_{ij} $(i=\overline{1,n};\ j=\overline{1,m})$ матриці шкодувань одержують як різниці $d_{ij}=\max\limits_i a_{ij}-a_{ij}$ між максимальним елементом j-го стовпця вихідної матриці $\|a_{ij}\|$ й елементом a_{ij}. Матриця шкодувань доповнюється ще одним стовпцем $\|d_{i(m+1)}\|$, кожен елемент якого є максимальним елементом відповідного рядка матриці шкодувань. Вибирається та альтернатива x_i, якій відповідає мінімальний елемент додаткового стовпця матриці шкодувань.

2.1.2. Нейтральний критерій на шкодуваннях

У критерії Севіджа в неявній формі передбачається, що середовище вороже до ОПР. Однак середовище може бути не тільки ворожим, але й прихильним або нейтральним до ОПР. У випадку нейтрального середовища маємо критерій

$$K_{\text{н.ш}}=\min_i \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}(\max_i a_{ij}-a_{ij}), \tag{2.2}$$

який є аналогом нейтрального критерію для матриці виграшів.

2.1.3. Критерій суб'єктивно-середніх шкодувань

Критерій Севіджа, мінімізуючи шкодування або додаткові втрати, не враховує абсолютну величину елементів вихідної матриці рішень $\|a_{ij}\|$, а це може приводити до оптимальності в шкодуваннях й більших загальних втратах. У зв'язку із цим був запропонований критерій $K_{\text{сс.ш}}$ суб'єктивно-середніх шкодувань, що, якоюсь мірою усунув недолік критерію Севіджа за рахунок врахування величин сум елементів у стовпцях матриці $\|a_{ij}\|$

$$K_{\text{сс.ш}} = \min_i \sum_{j=1}^{m} (\max_i a_{ij} - a_{ij}) p_j, \tag{2.3}$$

де p_j – суб'єктивна імовірність стану зовнішнього середовища y_j, яка береться такою, що дорівнює відношенню суми елементів j-го стовпця матриці $\|a_{ij}\|$ до суми всіх елементів матриці $\|a_{ij}\|$

$$p_j = \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} \right) \Bigg/ \left(\sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \right), \; j = \overline{1,\ m}. \tag{2.4}$$

Приклад 2.2. Виберемо за допомогою критерію суб'єктивно-середніх шкодувань кращу альтернативу для даних прикладу 2.1. Для цього спочатку розрахуємо суб'єктивні імовірності p_j за формулою (2.4), а потім за допомогою виразу (2.3) визначимо кращу альтернативу. Результати розрахунків наведено в табл. 2.3.

Таблиця 2.3 – Результат розрахунків

$F(x, y)$	y_1	y_2	y_3	$\sum_{j=1}^{3} d_{ij} p_j$	$K_{\text{сс. ш}}$
	$p_1 = 0{,}134$	$p_2 = 0{,}289$	$p_3 = 0{,}577$		
x_1	20	0	0	2,680	2,680
x_2	12	1	3	3,628	–
x_3	0	2	15	9,233	–

Таким чином, врахування величин елементів a_{ij} вихідної матриці в суб'єктивних імовірностях критерію $K_{\text{сс. ш}}$ приводить до вибору іншої альтернативи, ніж критерій Севіджа.

2.1.4. Критерій Хоменюка

У критерії Хоменюка, як й у критерії суб'єктивно-середніх шкодувань, об'єктивні імовірності про появу станів зовнішнього середовища відсутні. Для врахування впливу появи того або іншого стану середовища вводяться суб'єктивні імовірності за допомогою матриці шкодувань

$$p_j = \left(\sum_{i=1}^{n} (\max_i a_{ij} - a_{ij}) \right) / \left(\sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} (\max_i a_{ij} - a_{ij}) \right), \ j = \overline{1,\ m}. \qquad (2.5)$$

Сам критерій Хоменюка має вигляд

$$K_{\text{Х}} = \max_i \sum_{j=1}^{m} a_{ij} p_j. \qquad (2.6)$$

Таким чином, критерій Хоменюка, як і критерій суб'єктивно-середніх шкодувань, у своєму виразі використовує й елементи матриці рішень $\|a_{ij}\|$, й елементи матриці шкодувань $\|d_{ij}\|$.

2.2. Контрольні запитання та завдання

2.2.1. Контрольні запитання

1. Класичні критерії із шкодуваннями. Критерій Севіджа.
2. Пояснити принцип роботи нейтрального критерія на шкодуваннях.
3. Пояснити функціонування критерію суб'єктивно-середніх шкодувань.
4. Пояснити критерій суб'єктивно-середніх шкодувань.
5. Критерії з суб'єктивними імовірностями. Критерій Хоменюка.

2.2.2. Завдання

1. Для заданого варіанта функції реалізації визначити кращі альтернативи за допомогою критеріїв (2.1)–(2.3), (2.6).
2. Запропонувати й обґрунтувати свій унікальний критерій $K_{\text{студент}}$ із шкодуваннями для прийняття рішень в умовах невизначеності.

3. Продемонструвати працездатність вашого критерію на заданій та запропонованій вами функціях реалізації.

4. Розробити функцію реалізації, в якій критерії $K_{\text{мм}}, K_S$ виділять як кращу одну й ту саму альтернативу.

5. Розробити функцію реалізації, в якій критерії $K_S, K_{\text{студент}}$ виділять як кращу одну й ту саму альтернативу.

3. КЛАСИЧНІ КРИТЕРІЇ ДЛЯ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ В УМОВАХ РИЗИКУ

3.1. Прийняття рішень в умовах ризику

Математична модель задачі прийняття рішення є формальним описом мети, засобів і результатів, а також способу зв'язку засобів із результатами. Для формального опису засобів й результатів задають множину $X = \{x_1, ..., x_n\}$ альтернатив та множину $A = \{a_1, ..., a_n\}$ результатів. Альтернативи – це те, що вибирає особа, яка приймає рішення, а результати – те, до чого вони приводять при конкретному стані зовнішнього середовища.

У задачах прийняття рішень із скінченними множинами X і A існує декілька типів залежності результатів від альтернатив. У цій роботі розглядається тип зв'язку, який передбачає, що кожна альтернатива може привести до одного з декількох результатів, кожний з яких має певну імовірність появи. Ця імовірність визначається двома чинниками: вибором альтернативи, здійснюваним ОПР, і станом зовнішнього середовища. Позначимо множину всіх станів зовнішнього середовища через $Y = \{y_1, ..., y_m\}$, тоді кожний результат $a_{ij} \in A$ внаслідок сказаного є функцією двох аргументів: $a_{ij} = F(x_i, y_j)$, де x_i ($x_i \in X$) – вибрана альтернатива; y_j ($y_j \in Y$) – стан зовнішнього середовища.

Функцію $F(x, y)$ називають функцією реалізації. Якщо множина альтернатив та множина станів середовища скінченні, то зручно наводити функцію реалізації F у вигляді таблиці (табл. 3.1). Ця таблиця для конкретних задач, що розглядаються, визначає всі їх можливі рішення, тому її часто називають матрицею рішень. Ці рішення (результати, наслідки) мають допускати кількісну оцінку, і ми будемо для простоти ототожнювати ці кількісні оцінки з відповідними результатами.

Розглянемо матрицю рішень для ситуацій, коли ОПР знає імовірності q_j $(\sum_{j=1}^{m} q_j = 1)$ появи кожного стану y_j $(j = \overline{1, m})$ зовнішнього середовища. В цьому випадку, якщо обрано альтернативу x_i, то для кожного результату $a_k \in A$ можна знайти імовірність p_k його настання. Для цього потрібно відзначити в i-му рядку табл. 3.1 всі клітинки, де знаходиться результат a_k, та просумувати імовірності відповідних стовпців. Таким чином, кожній альтернативі на множині результатів відповідає імовірнісна міра, а отже, в цьому випадку маємо задачу прийняття рішень у стохастичних умовах або в умовах ризику.

Таблиця 3.1 – Матриця рішень

$F(x, y)$	y_1	...	y_j	...	y_m
x_1	$a_{11} = F(x_1, y_1)$	...	$a_{1j} = F(x_1, y_j)$	...	$a_{1m} = F(x_1, y_m)$
...	...	...	...	...	...
x_i	$a_{im} = F(x_i, y_1)$	...	$a_{ij} = F(x_i, y_j)$	...	$a_{im} = F(x_i, y_m)$
...	...	...	...	...	...
x_n	$a_{1m} = F(x_n, y_1)$	...	$a_{nj} = F(x_n, y_j)$	...	$a_{nm} = F(x_n, y_m)$

3.2. Класичні критерії прийняття рішень в умовах ризику

3.2.1. Критерій Байєса – Лапласа

Критерій Байєса – Лапласа можна розглядати як узагальнення нейтрального критерію, що використовується для прийняття рішень в умовах невизначеності в припущенні, що середовище нейтральне до ОПР й, отже, всі його стани з'являються з однаковою імовірністю. У таких випадках доцільно вибирати альтернативи, яким відповідає максимальне середнє значення

$$K_{\text{н}} = \max_i \left(\frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} \right).$$

Якщо кожен стан y_j $(j = \overline{1, m})$ зовнішнього середовища з'являється зі своєю імовірністю q_j, то середнє значення, що відповідає кожній альтернативі, необхідно обчислювати з урахуванням цих імовірностей за допомогою виразу для математичного сподівання. У результаті цього узагальнення й виходить співвідношення для критерію Байєса – Лапласа

$$K_{BL} = \max_i \left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij} q_j \right), \quad \sum_{j=1}^{m} q_j = 1. \tag{3.1}$$

Таким чином, критерій Байєса – Лапласа як кращу вибирає альтернативу, якій відповідає найбільше математичне сподівання.

Застосування критерію Байєса – Лапласа припускає виконання таких умов:

- точне знання імовірностей появи станів зовнішнього середовища;
- незалежність імовірностей появи станів зовнішнього середовища від часу;
- реалізацію рішень (принаймні, теоретично) нескінченну кількість.

При виконанні цих умов критерій Байєса – Лапласа є абсолютно надійним критерієм, що виключає який-небудь ризик. Порушення зазначених умов робить критерій Байєса – Лапласа ризикованим.

3.2.2. Критерій Ходжа – Лемана

Критерій Байєса – Лапласа дає більш оптимістичні прогнози, ніж максимінний критерій, однак він припускає й більш високий рівень інформованості та багаторазові реалізації.

Критерій Байєса – Лапласа надійний тільки тоді, коли точно відомі імовірності появи станів зовнішнього середовища, однак на практиці точні числа, як правило, відсутні. Це послабляє довіру до цього критерію та змушує звертатися до більш надійного максимінного критерію, що гарантує означений мінімум. Цей гарантований мінімум можна спробувати збільшити за рахунок використання зваженої лінійної комбінації розглянутих критеріїв

$$K_{HL} = cK_{BL} + (1-c)K_{\text{мм}} = \max_i \left(c\sum_{j=1}^{m} a_{ij}q_j + (1-c)\min_j a_{ij} \right). \qquad (3.2)$$

За допомогою параметра c $(0 \le c \le 1)$, з одного боку, виражається ступінь довіри до розподілу імовірностей, що використовується, а з іншого боку, – ступінь небажаності появи дуже малих значень. Якщо ступінь довіри великий й кількість реалізацій ухваленого рішення значна, то акцентується критерій K_{BL}, а інакше перевага віддається максимінному критерію. Оскільки числова оцінка ступеня довіри до розподілу імовірностей, що використовується, й ступеня небажаності появи малих значень зазвичай утруднена, то вибір параметра c, як правило, суб'єктивний. У багатьох випадках враховують, що $c = 0{,}5$. При $c = 1$

критерій K_{HL} переходить у критерій Байєса – Лапласа, а при $c = 0$ перетворюється в максимінний критерій.

3.2.3. Критерій мінімуму дисперсії оцінного функціонала

Критерій Ходжа – Лемана за допомогою максимінного критерію якоюсь мірою обмежує появу окремих рішень із неприпустимо малими значеннями навіть при більших середніх значеннях, що отримуються за критерієм Байєса – Лапласа. Ще один спосіб обмеження появи малих значень – це обмеження через величину дисперсії щодо середнього значення, що отримується за допомогою критерію Байєса – Лапласа. Оскільки дисперсія D_i i-го рядка матриці рішень характеризує розсіювання елементів цього рядка щодо його середнього значення, то чим менша величина дисперсії, тим менша імовірність наявності в рядку й появи як рішення малих елементів a_{ij}.

Критерій мінімуму дисперсії оцінного функціонала має вигляд

$$K_{MD} = \min_i D_i = \min_i \left(\sum_{j=1}^{m} \left(a_{ij} - \sum_{j=1}^{m} a_{ij} q_j \right)^2 q_j \right), \qquad (3.3)$$

де q_j $(j = \overline{1,\ m})$ – імовірності появи станів зовнішнього середовища.

Критерій (3.3) у більшості випадків застосовується тільки як допоміжний критерій, оскільки співвідношення $D_i < D_k$ може виконуватися за умови

$$\sum_{j=1}^{m} a_{kj} q_j >> \sum_{j=1}^{m} a_{ij} q_j .$$

Як допоміжний критерій він може застосовуватися, наприклад, до тих альтернатив, значення критерію Байєса – Лапласа яких більше від якогось наперед заданого значення, або до альтернатив, що мають однакові або близькі значення критерію Байєса – Лапласа.

Відомі модифікації критерію, що враховують розкид значень не щодо середнього, а щодо найбільшого значення, щодо найбільш імовірного значення.

3.2.4. Критерій Гермейєра

Критерій Гермейєра визначається виразом

$$K_{\text{Гер}} = \max_i \min_j a_{ij} q_j \,, \quad \sum_{j=1}^{m} q_j = 1. \tag{3.4}$$

У відомому відношенні критерій Гермейєра є узагальненням максимінного критерію. У випадку рівномірного розподілу, коли $q_j = 1/m \quad (j = \overline{1,m})$, вони стають ідентичними.

Критерій Гермейєра є надійним тільки у випадку, коли точно відомі імовірності появи станів зовнішнього середовища й рішення реалізується велику кількість разів. А не то використання критерію Гермейєра може приводити до невиправдано великого ризику.

3.2.5. Критерій суб'єктивно-середніх шкодувань і критерій Хоменюка

Є критерії, які за формою збігаються з критерієм Байєса – Лапласа, однак вони використовують не об'єктивні, а суб'єктивні імовірності та належать до критеріїв прийняття рішень в умовах невизначеності. Одним із таких критеріїв є критерій суб'єктивно-середніх шкодувань

$$K_{\text{сс.ш}} = \min_i \sum_{j=1}^{m} (\max_i a_{ij} - a_{ij}) \, p_j, \tag{3.5}$$

де p_j – суб'єктивна імовірність стану y_j зовнішнього середовища, яка береться такою, що дорівнює відношенню суми елементів j-го стовпця матриці $\|a_{ij}\|$ до суми всіх елементів матриці $\|a_{ij}\|$

$$p_j = \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} \right) \Bigg/ \left(\sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \right). \tag{3.6}$$

У критерії Хоменюка суб'єктивні імовірності вводяться за допомогою матриці шкодувань

$$p_j = \left(\sum_{i=1}^{n} \max_i (a_{ij} - a_{ij}) \right) \Big/ \left(\sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} (\max_i a_{ij} - a_{ij}) \right). \quad (3.7)$$

Сам критерій Хоменюка за зовнішнім виглядом повністю збігається з критерієм Байєса – Лапласа:

$$K_{\text{Х}} = \max_i \sum_{j=1}^{m} a_{ij} p_j \ . \quad (3.8)$$

3.3. Контрольні запитання та завдання

3.3.1. Контрольні запитання

1. Поняття ризику. Способи оцінювання ризику в технічних системах.
2. Критерії прийняття рішень в умовах ризику. Критерій Байєса – Лапласа.
3. Похідні критерії прийняття рішень. Критерій Ходжа – Лемана.
4. Пояснити функціонування критерія мінімуму дисперсії оцінного функціонала.
5. Пояснити принцип роботи критерія Гермейєра.
6. Критерій суб'єктивно-середніх шкодувань та критерій Хоменюка.
7. Критерії, які за формою збігаються з критерієм Байєса – Лапласа.

3.3.2. Завдання

1. Для заданого варіанта функції реалізації визначити кращі альтернативи за допомогою критеріїв (3.1)–(3.5), (3.8).
2. Запропонувати й обґрунтувати свій унікальний критерій $K_{\text{студент}}$ із шкодуваннями для прийняття рішень в умовах ризику.
3. Продемонструвати працездатність вашого критерію на заданій та запропонованій вами функціях реалізації.
4. Розробити функцію реалізації, в якій критерії $K_{\text{мм}}, K_{\text{Гер}}$ виділять як кращу одну й ту саму альтернативу.
5. Розробити функцію реалізації, в якій критерії $K_{BL}, K_{\text{студент}}$ виділять як кращу одну й ту саму альтернативу.

6. Розробити функцію реалізації, в якій критерії K_S, $K_{\text{н}}$ виділять як кращу одну й ту саму альтернативу.

7. Розробити функцію реалізації, в якій критерії $K_S, K_{\text{студент}}$ виділять як кращу одну й ту саму альтернативу.

8. Дослідити доцільність застосування критеріїв K_S, $K_{\text{н.ш}}$, $K_{\text{сс. ш}}$, $K_{\text{Х}}$, $K_{\text{мм}}$, $K_{\text{а.г}}$, $K_{\text{н}}$, $K_{\text{студент}}$ в умовах, коли всі стани зовнішнього середовища з'являються з однаковою імовірністю.

4. СИНТЕЗ БАГАТОКОМПОНЕНТНИХ КРИТЕРІЇВ АЛГОРИТМОМ ІЗ ЛІНІЙНИМИ ЧАСТИННИМИ ОПИСАМИ МЕТОДУ ГРУПОВОГО ВРАХУВАННЯ АРГУМЕНТІВ

4.1. Синтез багатокомпонентних критеріїв

Оцінка багатьох ситуацій або об'єктів реального світу не може бути виконана за допомогою одно- або двокомпонентних класичних критеріїв прийняття рішень, оскільки ці об'єкти або ситуації оцінюються за десятками або навіть сотнями різних показників. У подібних випадках для прийняття рішень використовуються критерії вигляду

$$K = \sum_{i=1}^{n} a_i K_i \,, \tag{4.1}$$

де a_i $(i,=\overline{1,n})$ – вагові коефіцієнти; K_i $(i=\overline{1,n})$ – найпростіші одно- або двокомпонентні критерії.

Для одержання критеріїв вигляду (4.1) можна використовувати різні методи й алгоритми. Розглянемо один із них – алгоритм із лінійними частинними описами евристичного методу самоорганізації математичних моделей (або методу групового врахування аргументів (МГВА)), що призначений для синтезу критеріїв вигляду (4.1). У цьому алгоритмі на першому етапі його роботи як найпростіші критерії або оцінні функції можна використовувати відомі одно- або двокомпонентні критерії $K_1^1,\ K_2^1,\ \ldots,\ K_m^1,$ де верхній індекс указує на те, що це критерії першого етапу або першого ряду селекції багатокомпонентного критерію. При цьому будемо припускати, що необхідно одержати критерій K^*, за допомогою якого можна буде розподілити множини деяких об'єктів на два класи, наприклад, на об'єкти, що мають деякі певні властивості (перший клас), і на об'єкти, що не мають цих властивостей (другий клас). Для синтезу цього критерію будемо використовувати навчальну множину M об'єктів, для яких відомий правильний їх розподіл на два зазначених класи: M_1 й M_2, $M_1 \cap M_2 = \varnothing$, $M_1 \cup M_2 = M$. Розглянемо основні кроки алгоритму синтезу критерію K^*.

4.2. Алгоритм методу групового врахування аргументів із лінійними частинними описами для синтезу критеріїв

Крок 1. На першому ряду селекції множина $K^1 = \{K_1^1,\ K_2^1,\ ...,\ K_m^1\}$ найпростіших критеріїв використовується для розподілу об'єктів навчальної множини *M* на два вказаних класи: M_1 й M_2.

Крок 2. Для кожного найпростішого критерію множини K^1 підраховується показник якості $n_j\ (j = \overline{1, m})$ роботи критерію, наприклад, кількість правильно прокласифікованих об'єктів початкової навчальної множини *M*.

Крок 3. За показниками якості $n_j\ (j = \overline{1, m})$ відбирається наперед задана кількість *r* критеріїв $\overline{K}_1^1,\ \overline{K}_2^1,\ ...,\ \overline{K}_r^1,$ які правильно виконали класифікацію найбільшої кількості об'єктів із навчальної множини *M*. Якщо хоча б один із критеріїв правильно прокласифікував всі об'єкти множини *M*, то необхідний критерій знайдений, і робота алгоритму припиняється.

Крок 4. Отриману множину критеріїв $\overline{K}^1 = \{\overline{K}_1^1,\ \overline{K}_2^1,\ ...,\ \overline{K}_r^1\}$ перевіряють на можливість правильної класифікації всіх об'єктів множини *M*. Якщо виявляються елементи множини *M*, які не можуть бути правильно прокласифіковані відібраною множиною $\overline{K}^1$ критеріїв, то множину $\overline{K}^1$ розширюють: $\overline{K}^1 = \{\overline{K}_1^1, \overline{K}_2^1, ..., \overline{K}_r^1, ..., \overline{K}_{r_1}^1\},\ r_1 > r$, включаючи в неї додаткові критерії, що мають більш низькі показники якості, але дозволяють правильно класифікувати зазначені елементи множини *M*.

Крок 5. Критерії множини $\overline{K}^1 = \{\overline{K}_1^1, \overline{K}_2^1, ..., \overline{K}_r^1, ..., \overline{K}_{r_1}^1\},\quad r_1 > r$ пропускаються у другий ряд селекції (або другий етап роботи алгоритму) та з їхньою допомогою синтезується множина K^2 двочленних критеріїв вигляду:

$$K_q^2 = c_i \overline{K}_1^1 + (1-c_i)\overline{K}_2^1, \quad q=\overline{1,l}, \quad i=\overline{1,l};$$

$$K_q^2 = c_i \overline{K}_1^1 + (1-c_i)\overline{K}_3^1, \quad q=\overline{l+1,\ 2l}, \quad i=\overline{1,l};$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$K_q^2 = c_i \overline{K}_1^1 + (1-c_i)\overline{K}_{r_1}^1, \quad q=\overline{(r_1-2)l+1,\ (r_1-1)l}, \quad i=\overline{1,l}; \tag{4.2}$$

$$K_q^2 = c_i \overline{K}_2^1 + (1-c_i)\overline{K}_3^1, \quad q=\overline{(r_1-1)l+1,\ r_1 l}, \quad i=\overline{1,l};$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$K_q^2 = c_i \overline{K}_{r_1-1}^1 + (1-c_i)\overline{K}_{r_1}^1, \quad q=\overline{(C_{r_1}^2-1)l+1,\ C_{r_1}^2 l}, \quad i=\overline{1,l},$$

де $c_i \ (i=\overline{1,l})$ – додатні константи, що задовольняють умови: $0<c_i<1, \ c_i \neq c_j$, якщо $i \neq j$; $C_{r_1}^2$ – кількість поєднань із r_1 по 2.

Крок 6. Кожен критерій з множини $K^2 = \{K_1^2, K_2^2, ..., K_d^2\}$, де $d = lC_{r_1}^2$, використовується для розподілу об'єктів навчальної множини *M* на два зазначених класи: M_1 й M_2. При цьому для кожного критерію з множини K^2 підраховується показник якості $n_j \ (j=\overline{1,d})$ роботи критерію.

Крок 7. За показниками якості $n_j \ (j=\overline{1,d})$ відбирається наперед задана кількість *r* кращих критеріїв $\overline{K}_1^2, \overline{K}_2^2, ..., \overline{K}_r^2$, які правильно виконали класифікацію найбільшої кількості об'єктів із навчальної множини *M*. Якщо один або кілька кращих критеріїв правильно виконали класифікацію всіх об'єктів множини *M*, то мета синтезу критеріїв досягнута, і робота алгоритму з одержання нових критеріїв припиняється.

Крок 8. Отриману множину критеріїв $\overline{K}^2 = \{\overline{K}_1^2, \overline{K}_2^2, ..., \overline{K}_r^2\}$ перевіряють на можливість правильної класифікації всіх об'єктів навчальної множини *M*. Якщо виявляються елементи множини *M*, які не можуть бути правильно прокласифіковані відібраною множиною $\overline{K}^2$ критеріїв, то множину $\overline{K}^2$ розширюють до значення $\overline{K}^2 = \{\overline{K}_1^2, \overline{K}_2^2, ..., \overline{K}_r^2, ..., \overline{K}_{r_2}^2\}$, $r_2 > r$, включаючи в неї додаткові критерії поточного або першого ряду селекції, які мають більш низькі показники якості, але які дозволяють правильно класифікувати зазначені елементи множини *M*.

Крок 9. Критерії множини $\overline{K}^2 = \{\overline{K}_1^2,\ \overline{K}_2^2,\ \ldots,\ \overline{K}_r^2,\ \ldots,\ \overline{K}_{r_2}^2\},\ r_2 \geq r$ пропускаються в третій ряд селекції, де синтезується множина K^3 критеріїв вигляду

$$\begin{aligned} K_q^3 &= c_i \overline{K}_1^2 + (1-c_i)\overline{K}_2^2,\quad q=\overline{1,l},\quad i=\overline{1,l};\\ K_q^3 &= c_i \overline{K}_1^2 + (1-c_i)\overline{K}_3^2,\quad q=\overline{l+1,\ 2l},\quad i=\overline{1,l};\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ K_q^3 &= c_i \overline{K}_{r_2-1}^2 + (1-c_i)\overline{K}_{r_2}^2,\quad q=\overline{(C_{r_2}^2-1)l+1,\ C_{r_2}^2 l},\quad i=\overline{1,l}, \end{aligned} \tag{4.3}$$

де $c_i\ (i=\overline{1,l})$ – додатні константи, що задовольняють умови $0 < c_i < 1,\ \ c_i \neq c_j$, якщо $i \neq j$.

Процес синтезу, оцінки й селекції критеріїв триває доти, доки не буде отриманий критерій, що правильно виконує класифікацію елементів множини *M*, або поки не будуть виконуватися інші умови закінчення роботи алгоритму, наприклад, за кількістю рядів селекції, за відсутності поліпшення показників якості кращих критеріїв поточного ряду селекції порівняно з показниками критеріїв одного або декількох попередніх рядів селекції й т. д.

Приклад 4.1. Розглянемо синтез критерію для функції реалізації, яка має 8 альтернатив і 7 станів зовнішнього середовища (табл. 4.1).

Таблиця 4.1 – Функція реалізації

$F(x, y)$	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	$K_{\text{мм}}$	$K_{\text{а. г}}$	$K_{\text{н}}$	K_S	$K_{\text{доб}}$	K_1^2	K_2^2
x_1	3	7	8	9	10	11	12	3	12	8,57	6	$2{,}00\cdot10^6$	10,28	7,00
x_2	2	3	7	8	4	5	12	2	12	5,86	8	$0{,}81\cdot10^5$	8,93	6,04
x_3	8	6	5	10	6	7	8	5	10	7,14	7	$0{,}81\cdot10^5$	8,57	5,04
x_4	7	5	5	3	10	13	6	3	13	7,00	9	$0{,}41\cdot10^6$	10,00	6,70
x_5	4	10	11	12	9	8	7	4	12	8,71	5	$2{,}66\cdot10^6$	10,35	7,33
x_6	8	2	12	1	12	11	6	1	12	7,43	11	$0{,}15\cdot10^6$	9,71	6,07
x_7	9	3	11	11	10	9	10	3	11	9,00	7	$2{,}94\cdot10^6$	10,00	6,97
x_8	5	6	5	11	7	11	10	5	11	7,86	7	$1{,}27\cdot10^6$	9,43	6,13
n_j	–	–	–	–	–	–	–	4	2	4	2	4	8	8

У прикладі як навчальна множина *M* застосовується множина альтернатив $\{x_1,\ x_2,\ ...,\ x_8\}$. Множина *M* розділена на дві підмножини: кращих альтернатив $M_1=\{x_1,x_4,x_5,x_7\}$ і гірших альтернатив $M_2=\{x_2,x_3,x_6,x_8\}$. Потрібно за допомогою навчальної множини *M* синтезувати критерій, який дозволяє правильно класифікувати альтернативи, які належать до тих самих класів, що й альтернативи навчальної множини.

Використаємо для класифікації альтернатив спочатку класичні критерії: максимінний (4.4), азартного гравця (4.5), нейтральний (4.6), Севіджа (4.7) і критерій добутків (4.8), які мають такий вигляд:

$$K_{\text{мм}}=\max_i \min_j a_{ij}; \tag{4.4}$$

$$K_{\text{а. г}}=\max_i \max_j a_{ij}; \tag{4.5}$$

$$K_{\text{н}}=\max_i \left(\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}\right); \tag{4.6}$$

$$K_S=\min_i(\max_j(\max_i a_{ij}-a_{ij})); \tag{4.7}$$

$$K_{\text{доб}}=\max_i\left(\prod_{i=1}^{\mathrm{m}} a_{ij}\right), \tag{4.8}$$

де a_{ij} $(i=\overline{1,n};\ j=\overline{1,m})$ – елементи функції реалізації; *n* – кількість рядків функції реалізації; *m* – кількість стовпців функції реалізації.

Результати застосування критеріїв наведено в табл. 4.1. Аналіз цієї таблиці показує, що максимінний критерій у три кращі альтернативи включає альтернативи x_3, x_8 і x_5, що мають більш високі показники, за критерієм ($K_{\text{мм}}\geq 4$). На четверте місце в підмножині M_1 претендує відразу три альтернативи: x_1, x_4 і x_7, які мають однакове значення критерію ($K_{\text{мм}}=3$) і які входять у навчальну підмножину M_1 множини *M*. У зв'язку із цим можна припустити, що максимінний критерій поділив множину *M* на такі дві підмножини: $M_{1\text{мм}}=\{x_1,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_7,\ x_8\}$, $M_{2\text{мм}}=\{x_2,\ x_6\}$. У множину кращих альтернатив правильно включено альтернативи $x_1,\ x_4,\ x_5,\ x_7$ й помилково – $x_3,\ x_8$.

Показник якості n_j ($j \in \{\text{мм}, \text{а.г}, \text{н}, S, \text{доб}\}$) роботи будь-якого критерію K_j ($K_j \in \{K_{\text{мм}}, K_{\text{а.г}}, K_{\text{н}}, K_S, K_{\text{доб}}\}$) визначимо в такий спосіб:

$$n_j = n_1 - n_2, \tag{4.9}$$

де n_1, n_2 – відповідно кількість альтернатив, що правильно та неправильно прокласифіковані.

Чим більша величина n_j, тим краще критерій K_j класифікує альтернативи навчальної множини M. Відзначимо, що як показник якості роботи критеріїв може використовуватися й кожен окремий одночлен правої частини виразу (4.9).

Максимінний критерій при класифікації альтернатив зробив тільки дві помилки, тому за співвідношенням (4.9) маємо $n_{\text{мм}} = 6 - 2 = 4$.

Аналогічно отримано показники якості роботи й інших критеріїв, ці показники наведено в останньому рядку табл. 4.1. Аналіз показників якості роботи критеріїв показує, що жоден із застосованих критеріїв не розв'язує правильно завдання поділу множини альтернатив на дві заданих підмножини. У зв'язку із цим виконаємо синтез двокомпонентних критеріїв. Формально за допомогою співвідношень (4.2) будуть отримані такі критерії:

$$K_q^2 = c_i K_{\text{мм}} + (1 - c_i) K_{\text{а.г}}, \quad q = \overline{1, l}, \quad i = \overline{1, l}; \tag{4.10}$$

$$K_q^2 = c_i K_{\text{мм}} + (1 - c_i) K_{\text{н}}, \quad q = \overline{l + 1,\ 2l}, \quad i = \overline{1, l}; \tag{4.11}$$

$$K_q^2 = c_i K_{\text{мм}} + (1 - c_i) K_S, \quad q = \overline{2l + 1,\ 3l}, \quad i = \overline{1, l}; \tag{4.12}$$

$$K_q^2 = c_i K_{\text{мм}} + (1 - c_i) K_{\text{доб}}, \quad q = \overline{3l + 1,\ 4l}, \quad i = \overline{1, l}; \tag{4.13}$$

$$K_q^2 = c_i K_{\text{а.г}} + (1 - c_i) K_{\text{н}}, \quad q = \overline{4l + 1,\ 5l}, \quad i = \overline{1, l}; \tag{4.14}$$

$$K_q^2 = c_i K_{\text{а.г}} + (1 - c_i) K_S, \quad q = \overline{5l + 1,\ 6l}, \quad i = \overline{1, l}; \tag{4.15}$$

$$K_q^2 = c_i K_{\text{а.г}} + (1 - c_i) K_{\text{доб}}, \quad q = \overline{6l + 1,\ 7l}, \quad i = \overline{1, l}; \tag{4.16}$$

$$K_q^2 = c_i K_{\text{н}} + (1 - c_i) K_S, \quad q = \overline{7l + 1,\ 8l}, \quad i = \overline{1, l}; \tag{4.17}$$

$$K_q^2 = c_i K_{\text{н}} + (1 - c_i) K_{\text{доб}}, \quad q = \overline{8l + 1,\ 9l}, \quad i = \overline{1, l}; \tag{4.18}$$

$$K_q^2 = c_i K_S + (1 - c_i) K_{\text{доб}}, \quad q = \overline{9l + 1,\ 10l}, \quad i = \overline{1, l}. \tag{4.19}$$

Критерії (4.12), (4.15), (4.17), (4.19), у які одним із компонентів входить критерій Севіджа, використати безпосередньо важко, тому що в критерії Севіджа остання операція min. Вона виділяє мінімальний елемент, а в інших критеріях остання операція max, що виділяє максимальний елемент із чисел, що характеризують альтернативи. У цьому випадку ні мінімальна, ні максимальна або зважена сума числових значень критеріїв не гарантує правильного вибору альтернативи. У зв'язку із цим необхідно яким-небудь чином змінити в одному з компонентів останню операцію на протилежну, щоб обидва доданки складеного критерію або мінімізувалися, або максимізувалися. Природно, що при цьому упорядкування альтернатив за допомогою перетвореного критерію має залишитися таким самим, як й у початкового. Перетворимо критерій Севіджа до вигляду

$$K_S^* = \max_i \left(\max_{i,j} d_{ij} - K_S \right), \tag{4.20}$$

де d_{ij} $(i = \overline{1,n};\ j = \overline{1,m})$ – елементи матриці шкодувань.

Для розглянутого прикладу елементи матриці шкодувань наведено в табл. 4.2. У двох останніх стовпцях таблиці наведено й результати роботи критеріїв K_S, K_S^*, які підтверджують ідентичність ранжирування ними альтернатив. Критерій Севіджа ранжирує альтернативи в такий спосіб: x_5, x_1, x_3, x_7, x_8, x_2, x_4, x_6. При цьому альтернатива x_5 є кращою, а альтернатива x_6 – гіршою, альтернативи x_3, x_7, x_8 – рівноцінні. Критерій K_S^* упорядковує альтернативи в такий самий спосіб. Для оцінки альтернатив розглянутого прикладу не має сенсу безпосередньо використовувати й критерії (4.13), (4.16), (4.18), (4.19), що містять як компоненти критерій добутків. Аналіз даних табл. 4.1 показує, що числові значення, що характеризують альтернативи й визначаються за допомогою критерію добутків, на 4–6 порядків більші від числових значень, одержуваних за допомогою інших критеріїв. У зв'язку із цим критерій добутків у співвідношеннях (4.13), (4.16), (4.18), (4.19) необхідно використати з ваговим коефіцієнтом $c_{\text{доб}} \cong 1 \cdot 10^{-6} - 1 \cdot 10^{-5}$.

Таблиця 4.2 – Матриця шкодувань

$F(x, y)$	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	K_S	K_S^*
x_1	6	3	4	3	2	2	0	6	5
x_2	7	7	5	4	8	8	0	8	3
x_3	1	4	7	2	6	6	4	7	4
x_4	2	5	7	9	2	0	6	9	2
x_5	5	0	1	0	3	5	5	5	6
x_6	1	8	0	11	0	2	6	11	0
x_7	0	7	1	1	2	4	2	7	4
x_8	4	4	7	1	5	2	2	7	4
n_j	–	–	–	–	–	–	–	2	2

Для синтезу двокомпонентних критеріїв мають бути використані такі вирази:

$$K_q^2 = c_i K_{\text{мм}} + (1 - c_i) K_{\text{а.г}}, \quad q = \overline{1, l}, \quad i = \overline{1, l}; \tag{4.21}$$

$$K_q^2 = c_i K_{\text{мм}} + (1 - c_i) K_{\text{н}}, \quad q = \overline{l+1,\ 2l}, \quad i = \overline{1, l}; \tag{4.22}$$

$$K_q^2 = c_i K_{\text{мм}} + (1 - c_i) K_S^*, \quad q = \overline{2l+1,\ 3l}, \quad i = \overline{1, l}; \tag{4.23}$$

$$K_q^2 = c_i K_{\text{мм}} + (1 - c_i) c_{\text{доб}} K_{\text{доб}}, \quad q = \overline{3l+1,\ 4l}, \quad i = \overline{1, l}; \tag{4.24}$$

$$K_q^2 = c_i K_{\text{а.г}} + (1 - c_i) K_{\text{н}}, \quad q = \overline{4l+1,\ 5l}, \quad i = \overline{1, l}; \tag{4.25}$$

$$K_q^2 = c_i K_{\text{а.г}} + (1 - c_i) K_S^*, \quad q = \overline{5l+1,\ 6l}, \quad i = \overline{1, l}; \tag{4.26}$$

$$K_q^2 = c_i K_{\text{а.г}} + (1 - c_i) c_{\text{доб}} K_{\text{доб}}, \quad q = \overline{6l+1,\ 7l}, \quad i = \overline{1, l}; \tag{4.27}$$

$$K_q^2 = c_i K_{\text{н}} + (1 - c_i) K_S^*, \quad q = \overline{7l+1,\ 8l}, \quad i = \overline{1, l}; \tag{4.28}$$

$$K_q^2 = c_i K_{\text{н}} + (1 - c_i) c_{\text{доб}} K_{\text{доб}}, \quad q = \overline{8l+1,\ 9l}, \quad i = \overline{1, l}; \tag{4.29}$$

$$K_q^2 = c_i K_S^* + (1 - c_i) c_{\text{доб}} K_{\text{доб}}, \quad q = \overline{9l+1,\ 10l}, \quad i = \overline{1, l}. \tag{4.30}$$

У табл. 4.1 у двох останніх стовпцях наведено результати успішної класифікації множини альтернатив за допомогою критерію K_1^2 (4.25) при $c_i = 0{,}5$ та критерію K_2^2 (4.27) при $c_i = 0{,}5$; $c_{\text{доб}} = 10^{-6}$.

4.3. Контрольні запитання та завдання

4.3.1. Контрольні запитання

1. Метод самоорганізації математичних моделей.

2. Описати алгоритм синтезу критеріїв прийняття рішень з лінійними частинними описами.

3. Навести приклади показників якості роботи критеріїв.

4. Пояснити функціонування перетвореного критерію Севіджа.

5. Чому для оцінки альтернатив розглянутого прикладу не має сенсу використовувати критерії (4.13), (4.16)?

4.3.2. Завдання

1. Необхідно задатися функцією реалізації розмірами не менш ніж 8×7, де вісім альтернатив розглядаються як навчальна множина M. Віднести половину альтернатив до підмножини M_1 кращих альтернатив, а що залишилися – до підмножини M_2 таким чином, щоб не менше семи однокомпонентних критеріїв не могли правильно класифікувати задану множину альтернатив. (Як початкові дані можна використати дані табл. 4.1, додавши в неї додаткові рядки або (і) стовпці).

2. Синтезувати, використовуючи вирази (4.10)–(4.19), на другому ряду селекції не менш ніж 10–15 двокомпонентних критеріїв.

3. Синтезувати на третьому ряду селекції не менш ніж 4–5 критеріїв.

5. СИНТЕЗ БАГАТОКОМПОНЕНТНИХ КРИТЕРІЇВ АЛГОРИТМОМ ІЗ НЕЛІНІЙНИМИ ЧАСТИННИМИ ОПИСАМИ МЕТОДУ ГРУПОВОГО ВРАХУВАННЯ АРГУМЕНТІВ

5.1. Синтез багатокомпонентних критеріїв МГВА

Оцінка багатьох ситуацій або об'єктів реального світу може бути виконана не тільки за допомогою однокомпонентних або двокомпонентних класичних критеріїв прийняття рішень, але і за допомогою зваженої лінійної комбінації n таких критеріїв: $K=\sum\limits_{i=1}^{n} a_i K_i$, де $a_i\ (i=\overline{1,n})$ – вагові коефіцієнти; $K_i\ (i=\overline{1,n})$ – найпростіші однокомпонентні або двокомпонентні критерії. В подібних випадках для прийняття рішень використовуються й більш складні критерії вигляду:

$$K=\sum_{j=1}^{n} a_j K_j+\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{jk} K_j K_k+\ldots, \tag{5.1}$$

де $a_j,\ a_{jk}\ (j,k=\overline{1,n})$ – вагові коефіцієнти; $K_q\ (q=\overline{1,n})$ – найпростіші одно- або двокомпонентні критерії.

Для одержання критеріїв вигляду (5.1) можна використовувати різні методи й алгоритми. Розглянемо один із них – алгоритм із нелінійними частинними описами методу групового врахування аргументів (МГВА). У цьому алгоритмі на першому етапі його роботи як найпростіші критерії можна використовувати відомі критерії $K_1^1,\ K_2^1,\ \ldots,\ K_m^1$, де верхній індекс указує на те, що це критерії першого етапу або першого ряду селекції алгоритму МГВА. При цьому будемо припускати, що необхідно одержати критерій K^*, за допомогою якого можна буде розподіляти множини деяких об'єктів на два класи, наприклад, на об'єкти, що мають деякі певні властивості (перший клас), і на об'єкти, що не мають цих властивостей (другий клас). Для синтезу цього критерію будемо використовувати навчальну множину M об'єктів, для яких відомий правильний розподіл на два зазначених класи: M_1 й M_2, $M_1 \cap M_2 = \varnothing$, $M_1 \cup M_2 = M$. Розглянемо основні кроки алгоритму синтезу критерію K^*.

5.2. Алгоритм із нелінійними частинними описами методу групового врахування аргументів для синтезу критеріїв

Крок 1. На першому ряду селекції множина $K^1 = \{K_1^1,\ K_2^1,\ \ldots,\ K_m^1\}$ найпростіших критеріїв використовується для класифікації об'єктів навчальної множини M на два вказаних класи: M_1 й M_2.

Крок 2. Для кожного найпростішого критерію множини K^1 підраховується показник якості $n_j\ (j = \overline{1, m})$ роботи критерію (кількість правильно прокласифікованих об'єктів початкової навчальної множини M).

Крок 3. За показниками якості $n_j\ (j = \overline{1, m})$ відбирається наперед задана кількість r критеріїв $\overline{K}_1^1,\ \overline{K}_2^1,\ \ldots,\ \overline{K}_r^1$, які правильно виконали класифікацію найбільшої кількості об'єктів із навчальної множини M. Якщо хоча б один із критеріїв правильно прокласифікував всі об'єкти множини M, то необхідний критерій знайдений, і робота алгоритму припиняється.

Крок 4. Множину критеріїв $\overline{K}^1 = \{\overline{K}_1^1,\ \overline{K}_2^1,\ \ldots,\ \overline{K}_r^1\}$ перевіряють на можливість правильної класифікації всіх об'єктів множини M. Якщо виявляються елементи множини M, які не можуть бути правильно класифіковані відібраною множиною $\overline{K}^1$ критеріїв, то множину $\overline{K}^1$ розширюють: $\overline{K}^1 = \{\overline{K}_1^1,\ \overline{K}_2^1,\ \ldots,\ \overline{K}_r^1,\ \ldots,\ \overline{K}_{r_1}^1\},\ r_1 > r$, включаючи в неї додаткові критерії, що мають більш низькі показники якості, але дозволяють правильно класифікувати зазначені елементи множини M.

Крок 5. Критерії множини $\overline{K}^1 = \{\overline{K}_1^1,\ \overline{K}_2^1,\ \ldots,\ \overline{K}_r^1,\ \ldots,\ \overline{K}_{r_1}^1\},\ r_1 \geq r$ пропускаються у другий ряд селекції (або другий етап роботи алгоритму із нелінійними частинними описами МГВА) і з їхньою допомогою синтезується множина K^2 двочленних критеріїв вигляду:

$$K_q^2 = c_{1i}^q \overline{K}_1^1 + c_{2i}^q \overline{K}_2^1 + c_{3i}^q \overline{K}_1^1 \overline{K}_2^1, \;\; c_{1i}^q + c_{2i}^q + c_{3i}^q = 1, \;\; q = \overline{1, l}, \;\; i = \overline{1, l};$$

$$K_q^2 = c_{1i}^q \overline{K}_1^1 + c_{2i}^q \overline{K}_3^1 + c_{3i}^q \overline{K}_1^1 \overline{K}_3^1, \;\; c_{1i}^q + c_{2i}^q + c_{3i}^q = 1, \;\; q = \overline{l+1, \; 2l}, \;\; i = \overline{1, l};$$

. . . .

$$\begin{gathered} K_q^2 = c_{1i}^q \overline{K}_1^1 + c_{2i}^q \overline{K}_{r_1}^1 + c_{3i}^q \overline{K}_1^1 \overline{K}_{r_1}^1, \; c_{1i}^q + c_{2i}^q + c_{3i}^q = 1, \\ q = \overline{(r_1 - 2)l + 1, \; (r_1 - 1)l}, \; i = \overline{1, l}; \end{gathered} \tag{5.2}$$

$$K_q^2 = c_{1i}^q \overline{K}_2^1 + c_{2i}^q \overline{K}_3^1 + c_{3i}^q \overline{K}_2^1 \overline{K}_3^1, \; c_{1i}^q + c_{2i}^q + c_{3i}^q = 1, \; q = \overline{(r_1 - 1)l + 1, \; r_1 l}, \; i = \overline{1, l};$$

. . . .

$$\begin{gathered} K_q^2 = c_{1i}^q \overline{K}_{r_1 - 1}^1 + c_{2i}^q \overline{K}_{r_1}^1 + c_{3i}^q \overline{K}_{r_1 - 1}^1 \overline{K}_{r_1}^1, \;\; c_{1i}^q + c_{2i}^q + c_{3i}^q = 1, \\ q = \overline{(C_{r_1}^2 - 1)l + 1, \; C_{r_1}^2 l}, \;\; i = \overline{1, l}, \end{gathered}$$

де $c_{1i}^q, c_{2i}^q, c_{3i}^q$ $(i = \overline{1, l})$ – додатні константи, що задовольняють умови $0 < c_{1i}^q, c_{2i}^q, c_{3i}^q < 1$; $C_{r_1}^2$ – кількість поєднань із r_1 по 2.

Крок 6. Кожен критерій із множини $K^2 = \{K_1^2, K_2^2, ..., K_d^2\}$, де $d = lC_{r_1}^2$, використовується для розподілу об'єктів навчальної множини *M* на два зазначених класи: M_1 й M_2. При цьому для кожного критерію з множини K^2 підраховується показник якості n_j $(j = \overline{1, d})$ роботи критерію.

Крок 7. За показниками якості n_j $(j = \overline{1, d})$ відбирається наперед задана кількість *r* кращих критеріїв $\overline{K}_1^2, \overline{K}_2^2, ..., \overline{K}_r^2$, які правильно виконали класифікацію найбільшої кількості об'єктів із навчальної множини *M*. Якщо один або кілька кращих критеріїв правильно виконали класифікацію всіх об'єктів множини *M*, то мета синтезу критеріїв досягнута, і робота алгоритму з одержання нових критеріїв припиняється.

Крок 8. Отриману множину критеріїв $\overline{K}^2 = \{\overline{K}_1^2, \overline{K}_2^2, ..., \overline{K}_r^2\}$ перевіряють на можливість правильної класифікації всіх об'єктів навчальної множини *M*. Якщо виявляються елементи множини *M*, які не можуть бути правильно прокласифіковані відібраною множиною $\overline{K}^2$ критеріїв, то множину $\overline{K}^2$ розширюють до значення $\overline{K}^2 = \{\overline{K}_1^2, \overline{K}_2^2, ..., \overline{K}_r^2, ..., \overline{K}_{r_2}^2\}$, $r_2 > r$, включаючи в неї додаткові критерії поточного або першого ряду селекції, які мають більш низькі показники якості, але які дозволяють правильно класифікувати зазначені елементи множини *M*.

Крок 9. Критерії множини $\overline{K}^2 = \{\overline{K}_1^2,\ \overline{K}_2^2,\ \ldots,\ \overline{K}_r^2,\ \ldots,\ \overline{K}_{r_2}^2\},\ r_2 \ge r$ пропускаються в третій ряд селекції, де синтезується множина K^3 критеріїв вигляду:

$$K_q^3 = c_{1i}^q \overline{K}_1^2 + c_{2i}^q \overline{K}_2^2 + c_{3i}^q \overline{K}_1^2 \overline{K}_2^2,\ \ c_{1i}^q + c_{2i}^q + c_{3i}^q = 1,\ \ q = \overline{1, l},\ \ i = \overline{1, l};$$

$$K_q^3 = c_{1i}^q \overline{K}_1^2 + c_{2i}^q \overline{K}_3^2 + c_{3i}^q \overline{K}_1^2 \overline{K}_3^2,\ \ c_{1i}^q + c_{2i}^q + c_{3i}^q = 1,\ \ q = \overline{l+1,\ 2l},\ \ i = \overline{1, l};$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \tag{5.3}$$

$$K_q^3 = c_{1i}^q \overline{K}_{r_2-1}^2 + c_{2i}^q \overline{K}_{r_2}^2 + c_{3i}^q \overline{K}_{r_2-1}^2 \overline{K}_{r_2}^2,\ \ c_{1i}^q + c_{2i}^q + c_{3i}^q = 1,$$
$$q = \overline{(C_{r_2}^2 - 1)l + 1,\ C_{r_2}^2 l},\ \ i = \overline{1, l},$$

де $c_{1i}^q, c_{2i}^q, c_{3i}^q$ $(i = \overline{1, l})$ – додатні константи, що задовольняють умови $0 < c_{1i}^q, c_{2i}^q, c_{3i}^q < 1$.

Процес синтезу, оцінки й селекції критеріїв триває доти, доки не буде отриманий критерій, що правильно виконує класифікацію елементів множини *M*, або поки не будуть виконуватися інші умови закінчення роботи алгоритму, наприклад, за кількістю рядів селекції, за відсутності поліпшення показників якості кращих критеріїв поточного ряду селекції порівняно з показниками критеріїв одного або декількох попередніх рядів селекції й т. д.

Приклад 5.1. Розглянемо як приклад синтез критерію для функції реалізації, яка має 8 альтернатив і 7 станів зовнішнього середовища і яка наведена у прикладі 4.1 (табл. 4.1). У цьому прикладі як навчальна множина *M* застосовується множина альтернатив $\{x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_8\}$. Множина *M* розділена на дві підмножини: кращих альтернатив $M_1 = \{x_1, x_4, x_5, x_7\}$ і гірших альтернатив $M_2 = \{x_2, x_3, x_6, x_8\}$. Потрібно за допомогою навчальної множини *M* синтезувати критерій, який дозволяє правильно класифікувати альтернативи, які належать до тих самих класів, що й альтернативи навчальної множини.

Як і у прикладі 4.1, використаємо спочатку для класифікації альтернатив класичні критерії: максимінний (4.4), азартного гравця (4.5), нейтральний (4.6), модифікований критерій Севіджа (4.20) і критерій добутків (4.8). Показник якості n_j роботи будь-якого критерію K_j залишимо тим самим. Результати застосування критеріїв наведено у прикладі 4.1.

Оскільки жоден із критеріїв, що застосовуються, не розв'язує правильно завдання поділу множини альтернатив на дві заданих підмножини, то виконаємо синтез критеріїв другого ряду селекції за допомогою співвідношень вигляду (5.2) алгоритму МГВА із нелінійними частковими описами. У результаті будуть отримані такі критерії:

$$K_q^2 = c_{1i}^q K_{\text{мм}}^1 + c_{2i}^q K_{\text{а.г}}^1 + c_{3i}^q K_{\text{мм}}^1 K_{\text{а.г}}^1,\ \ c_{1i}^q + c_{2i}^q + c_{3i}^q = 1,\ \ q = \overline{1, l},\ \ i = \overline{1, l}\,;$$

$$K_q^2 = c_{1i}^q K_{\text{мм}}^1 + c_{2i}^q K_{\text{н}}^1 + c_{3i}^q K_{\text{мм}}^1 K_{\text{н}}^1,\ \ c_{1i}^q + c_{2i}^q + c_{3i}^q = 1,\ \ q = \overline{l+1,\ 2l},\ \ i = \overline{1, l}\,;$$

$$K_q^2 = c_{1i}^q K_{\text{мм}}^1 + c_{2i}^q K_S^{*1} + c_{3i}^q K_{\text{мм}}^1 K_S^{*1},\ \ c_{1i}^q + c_{2i}^q + c_{3i}^q = 1,\ \ q = \overline{2l+1,\ 3l},\ \ i = \overline{1, l}\,;$$

$$K_q^2 = c_{1i}^q K_{\text{мм}}^1 + c_{2i}^q c_{\text{доб}} K_{\text{доб}}^1 + c_{3i}^q c_{\text{доб}} K_{\text{мм}}^1 K_{\text{доб}}^1,$$
$$c_{1i}^q + c_{2i}^q + c_{3i}^q = 1,\ q = \overline{3l+1,\ 4l},\ i = \overline{1, l};$$

$$K_q^2 = c_{1i}^q K_{\text{а.г}}^1 + c_{2i}^q K_{\text{н}}^1 + c_{3i}^q K_{\text{а.г}}^1 K_{\text{н}}^1,\ \ c_{1i}^q + c_{2i}^q + c_{3i}^q = 1,\ \ q = \overline{4l+1,\ 5l},\ \ i = \overline{1, l}\,;$$

$$K_q^2 = c_{1i}^q K_{\text{а.г}}^1 + c_{2i}^q K_S^{*1} + c_{3i}^q K_{\text{а.г}}^1 K_S^{*1},\ \ c_{1i}^q + c_{2i}^q + c_{3i}^q = 1,\ \ q = \overline{5l+1,\ 6l},\ \ i = \overline{1, l};$$

$$K_q^2 = c_{1i}^q K_{\text{а.г}}^1 + c_{2i}^q c_{\text{доб}} K_{\text{доб}}^1 + c_{3i}^q c_{\text{доб}} K_{\text{а.г}}^1 K_{\text{доб}}^1,\ \ c_{1i}^q + c_{2i}^q + c_{3i}^q = 1,$$
$$q = \overline{6l+1,\ 7l}, i = \overline{1, l};$$

$$K_q^2 = c_{1i}^q K_{\text{н}}^1 + c_{2i}^q K_S^{*1} + c_{3i}^q K_{\text{н}}^1 K_S^{*1},\ \ c_{1i}^q + c_{2i}^q + c_{3i}^q = 1,\ \ q = \overline{7l+1,\ 8l},\ \ i = \overline{1, l}\,;$$

$$K_q^2 = c_{1i}^q K_{\text{н}}^1 + c_{2i}^q c_{\text{доб}} K_{\text{доб}}^1 + c_{3i}^q c_{\text{доб}} K_{\text{н}}^1 K_{\text{доб}}^1,\ \ c_{1i}^q + c_{2i}^q + c_{3i}^q = 1,$$
$$q = \overline{8l+1,\ 9l},\ \ i = \overline{1, l};$$

$$K_q^2 = c_{1i}^q K_S^{*1} + c_{2i}^q c_{\text{доб}} K_{\text{доб}}^1 + c_{3i}^q c_{\text{доб}} K_S^{*1} K_{\text{доб}}^1, c_{1i}^q + c_{2i}^q + c_{3i}^q = 1,$$
$$q = \overline{9l+1,\ 10l}, i = \overline{1, l}.$$

Залежно від вибраних коефіцієнтів $c_{1i}^q, c_{2i}^q, c_{3i}^q$ ($q = \overline{1,\ 10l},\ \ i = \overline{1, l}$) необхідний критерій може бути отриманий або на другому, або на подальших рядах селекції. Критерії третього ряду селекції неважко отримати за допомогою співвідношень (5.3), а для отримання критеріїв на подальших рядах селекції необхідно використати співвідношення

$$K_q^{k+1} = c_{1i}^q \overline{K}_1^k + c_{2i}^q \overline{K}_2^k + c_{3i}^q \overline{K}_1^k \overline{K}_2^k, \quad c_{1i}^q + c_{2i}^q + c_{3i}^q = 1, \quad q = \overline{1, l}, \quad i = \overline{1, l};$$
$$K_q^{k+1} = c_{1i}^q \overline{K}_1^k + c_{2i}^q \overline{K}_3^k + c_{3i}^q \overline{K}_1^k \overline{K}_3^k, \quad c_{1i}^q + c_{2i}^q + c_{3i}^q = 1, \quad q = \overline{l+1, \ 2l}, \quad i = \overline{1, l};$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \tag{5.4}$$
$$K_q^{k+1} = c_{1i}^q \overline{K}_{r_2-1}^k + c_{2i}^q \overline{K}_{r_2}^k + c_{3i}^q \overline{K}_{r_2-1}^k \overline{K}_{r_2}^k,$$
$$c_{1i}^q + c_{2i}^q + c_{3i}^q = 1, q = \overline{(C_{r_2}^2 - 1)l + 1, \ C_{r_2}^2 l}, \ i = \overline{1, l},$$

де k – змінна, що визначає поточний ряд селекції; $\overline{K}_j^k$ $(j = \overline{1, r_k})$ – кращі часткові критерії k-го ряду селекції; r_k – кількість часткових критеріїв, що пропускаються у $(k+1)$-й ряд селекції.

5.3. Контрольні запитання та завдання

5.3.1. Контрольні запитання

1. Метод синтезу багатокомпонентних критеріїв.

2. Описати алгоритм синтезу критеріїв прийняття рішень з нелінійними частинними описами.

3. Навести приклади багатокомпонентних критеріїв.

5.3.2. Завдання

1. Необхідно задатися функцією реалізації розмірами не менш ніж 8 × 7, де вісім альтернатив розглядаються як навчальна множина M. Віднести половину альтернатив до підмножини M_1 кращих альтернатив, а що залишилися – до підмножини M_2 таким чином, щоб не менш семи однокомпонентних критеріїв не могли правильно класифікувати задану множину альтернатив. (Як початкові дані можна використати дані табл. 4.1, додавши в неї додаткові рядки або (і) стовпці.)

2. Синтезувати, використовуючи вирази (5.2), на другому ряду селекції не менш ніж 8 трикомпонентних критеріїв.

3. Синтезувати на третьому ряду селекції не менш ніж 3 – 5 критеріїв.

6. ФОРМАЛІЗАЦІЯ КОНФЛІКТНИХ СИТУАЦІЙ ЗА ДОПОМОГОЮ ТЕОРІЇ ІГОР

6.1. Основні поняття й визначення теорії ігор

Теорія ігор – розділ математики, що вивчає методи прийняття рішень у конфліктних ситуаціях.

Гра – математична модель конфліктної ситуації, у якій визначено учасників конфлікту (гравців), їхні можливі дії (стратегії), одержувана ними інформація, умови закінчення гри й правила зміни зацікавленості кожного гравця.

Партія гри – випадок розігрування гри деяким конкретним способом від початку до кінця.

У цей час немає загальновизнаної класифікації ігор, але можна відзначити кілька основних напрямів, що використовуються для класифікації ігор: кількість гравців і стратегій, характер взаємовідносин гравців, кількість кроків, характер і вид функцій виграшів і т. д.

Залежно від кількості гравців розрізняють ігри двох та n гравців. Найбільшого поширення набули ігри двох гравців. Вони найбільш досліджені й широко застосовуються на практиці. Ігри n гравців менш досліджені й застосовуються рідше, оскільки їхнє розв’язання істотно складніше, ніж розв’язання ігор двох гравців, причому труднощі розв’язання ігор зростають зі збільшенням кількості гравців.

За кількістю стратегій всі ігри можна розділити на скінченні й нескінченні. Гра називається скінченною, якщо кожний із гравців має скінчену кількість стратегій, а якщо ні, то гра називається нескінченною.

За характером взаємовідносин гравців розрізняють коаліційні, кооперативні й безкоаліційні ігри. Якщо в процесі гри гравці можуть укладати угоди й утворювати коаліції, то така гра називається коаліційною. Якщо коаліції визначено заздалегідь, то ігри називаються кооперативними. Якщо в процесі гри гравці не можуть укладати угоди й утворювати коаліції, то такі ігри називаються безкоаліційними.

Залежно від кількості ходів ігри поділяються на однокрокові й багатокрокові. Гра називається однокроковою, якщо кожний із гравців робить по одному кроку. Якщо хоча б один із гравців робить більше одного кроку, то гра називається багатокроковою.

За характером виграшів ігри поділяють на ігри з нульовою сумою й на ігри з ненульовою сумою. Якщо сума виграшів всіх гравців у кожній партії дорівнює нулю, то гра називається грою з нульовою сумою. У такій грі сума загального капіталу всіх гравців залишається незмінною й залежно від результату партії він перерозподіляється між гравцями. Таким чином, в іграх з нульовою сумою виграші одних гравців стають втратами інших гравців. Якщо грають два гравці їхні цілі стають діаметрально протилежними, оскільки виграш одного гравця дорівнює програшу іншого гравця. Ігри двох гравців із нульовою сумою називають антагоністичними. Багато політичних, військових та економічних ситуацій математично можна описувати як ігри з нульовою сумою.

В іграх із ненульовою сумою загальний капітал всіх гравців змінюється в процесі ігри, тому всі гравці можуть бути у виграші. Прикладом таких ігор є ігри, що моделюють взаємовигідні торговельні відносини між країнами.

За видом функцій виграшів розрізняють такі види ігор: матричні, біматричні, опуклі, безперервні й т. д.

Матрична гра – це скінчена однокрокова антагоністична гра двох гравців, у якій виграші першого гравця задаються за допомогою матриці розмірністю $n \times m$, де n – кількість рядків та стратегій першого гравця; m – кількість стовпців та стратегій другого гравця. Кожній парі стратегій (i, j) відповідно першого й другого гравців поставлено у відповідність число a_{ij}, що є виграшем першого гравця за рахунок другого, якщо $a_{ij} > 0$. Якщо $a_{ij} < 0$, то за цієї пари стратегій виграє другий гравець. Зазначена матриця називається матрицею гри або платіжною матрицею. Матричну гру з матрицею $n \times m$ часто називають грою $n \times m$.

Стратегії i й j ($i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$) відповідно першого й другого гравців часто називають чистими стратегіями.

Рішення матричної гри полягає у визначенні найкращої або оптимальної стратегії для кожного із гравців. Оскільки вибір найкращої стратегії кожним із гравців виконується за відсутності інформації про дії іншого гравця, то можна дати таке визначення найкращої або оптимальної стратегії, одного з основних понять теорії ігор.

Стратегія гравця називається оптимальною, якщо її застосування забезпечує гравцеві найбільший гарантований виграш при будь-яких можливих стратегіях іншого гравця.

Виходячи із цього визначення досліджуємо матрицю виграшів $A = \left\| a_{ij} \right\|$ першого гравця

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{im} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nm} \end{vmatrix}.$$

Якщо перший гравець вибере стратегію i ($i \in \{1, 2, \dots, n\}$), то другий гравець буде прагнути до того, щоб вибором своєї стратегії j ($j \in \{1, 2, \dots, m\}$) виграш першого гравця, а отже, і свій програш звести до мінімуму: $\alpha_i = \min\limits_j a_{ij}$, $i = \overline{1,\ n}$.

З мінімальних елементів α_i кожного рядка формується додатковий стовпець. Перший гравець буде прагнути знайти таку стратегію i, при якій величина α_i досягне максимального значення, тому він із цього стовпця виділяє максимальний елемент

$$\alpha = \max_i \alpha_i = \max_i \min_j a_{ij}.$$

Число α_i називають нижньою чистою ціною гри. Воно показує, який мінімальний виграш може гарантувати собі перший гравець, дотримуючись своєї максимінної стратегії.

Оптимальна поведінка другого гравця полягає в тому, що він за допомогою своїх стратегій повинен максимально зменшити виграш першого гравця, тобто для кожної своєї стратегії j він повинен визначити свій максимальний можливий програш $\beta_j = \max\limits_i a_{ij}$, сформувати із цих програшів додатковий рядок, а потім за допомогою цього рядка вибрати стратегію, за якої величина β_j мінімальна

$$\beta = \min_j \beta_j = \min_j \max_i a_{ij}.$$

Число β називається верхньою чистою ціною гри. Воно показує, що другий гравець за рахунок застосування своєї минімаксної стратегії може не допустити того, що виграш першого гравця буде більше β.

Таким чином, за рахунок оптимального застосування своїх чистих стратегій перший гравець може гарантувати собі виграш не менше α, а другий гравець – що його програш не буде більше β.

Якщо в матричній грі *A* нижня й верхня чисті ціни гри збігаються, то говорять, що матрична гра *A* має сідлову точку в чистих стратегіях і чисту ціну гри $v = \alpha = \beta$.

Сідловою точкою в матричній грі *A* називається пара (i_0, j_0) чистих стратегій відповідно першого й другого гравців, при яких досягається рівність між верхньою й нижньою чистими цінами гри $\alpha = \beta$.

Елемент $a_{i_0 j_0}$ матриці *A*, що знаходиться на перетині рядка i_0 й стовпця j_0 називають сідловою точкою матричної гри, а число $v = a_{i_0 j_0}$ – чистою ціною гри.

Поняття сідловой точки має певний зміст. Розглянемо його. Якщо в матричній грі *A* є сідлова точка (i_0, j_0) й один із гравців дотримується стратегії, що відповідає сідловій точці, то у іншого гравця немає кращої стратегії, ніж також дотримуватися сідлової точки. Дійсно, якщо сідлової точки дотримується перший гравець, а другий гравець хоче вибрати стратегію $j \neq j_0$, то, оскільки за визначенням β елемент $a_{i_0 j_0} = \min_j a_{i_0 j} \leq a_{i_0 j}$ $j = \overline{1,\ m}$ є мінімальним у додатковому рядку, другий гравець не зможе зменшити свій програш, він лише зможе його збільшити. Якщо сідлової точки дотримується другий гравець, а перший хоче змінити стратегію i_0 на $i \neq i_0$, то оскільки за визначенням α елемент $a_{i_0 j_0} = \max_i a_{i j_0}$ й $a_{i_0 j_0} \geq a_{i j_0}$ $i = \overline{1,\ n}$ є максимальним елементом додаткового стовпця, то перший гравець не зможе збільшити свій виграш за рахунок заміни стратегії i_0 на будь-яку іншу, він лише зможе його зменшити. Таким чином, маємо

$$a_{i j_0} \leq a_{i_0 j_0} \leq a_{i_0 j},$$

де i, j – відповідно довільні чисті стратегії першого й другого гравців; i_0, j_0 – чисті стратегії першого й другого гравців, що відповідають сідловій точці; a_{ij_0} – довільний елемент стовпця j_0 матриці *A*; $a_{i_0 j_0}$ – сідловий елемент матричної гри; $a_{i_0 j}$ – довільний елемент рядка i_0 матриці *A*.

Сідловий елемент $a_{i_0 j_0}$ є мінімальним елементом рядка i_0 й максимальним елементом стовпця j_0. Ця властивість сідлового елемента дозволяє запропонувати простий алгоритм для визначення сідлових точок: послідовно в кожному стовпці визначають максимальний елемент і перевіряють, чи є він мінімальним елементом у своєму рядку. Якщо елемент, що перевіряється, задовольняє цю умову, то він й є сідловим елементом, а відповідна йому пара чистих стратегій утворює сідлову точку. Природно, що пошук сідлових точок можна здійснити, й відшукуючи в кожному рядку мінімальний елемент, а потім перевіряючи, чи є він максимальним у стовпці.

Розв'язком матричної гри *A* у чистих стратегіях називається пара чистих стратегій (i_0, j_0), що утворюють сідлову точку, і сідловий елемент $a_{i_0 j_0}$.

Стратегії i_0, j_0, відповідно першого й другого гравців у матричній грі *A*, називають оптимальними чистими стратегіями.

Якщо в матричній грі немає сідлової точки в чистих стратегіях, то в цьому випадку $\alpha \neq \beta$ й $\alpha \leq \beta$ і одержати розв'язок матричної гри в чистих стратегіях не вдається. Можна тільки визначити, що ціна гри v перебуває між α і β. Для пошуку більш точного розв'язку матричної гри в подібних випадках необхідно застосовувати методи, що базуються не на чистих, а на змішаних стратегіях обох гравців.

Біматрична гра – це скінченна однокрокова безкоаліційна неантагоністична гра двох гравців, у якій виграші кожного гравця задаються за допомогою окремої матриці розмірністю $n \times m$, де n – кількість рядків та стратегій першого гравця; m – кількість стовпців та стратегій другого гравця.

Безперервна гра – це нескінченна гра з безперервними функціями виграшів кожного із гравців, стратегіями яких зазвичай є числа з визначеного інтервалу. Якщо функції виграшів у грі є не тільки безперервними, але й опуклими, то така гра називається опуклою.

6.2. Приклади ігор

Розглянемо кілька прикладів формалізації ігрових або конфліктних ситуацій у вигляді ігор.

Приклад 6.1. Гравці *A* й *B* вибирають одну із двох сторін монети й одночасно показують її один одному. Якщо обрані сторони монет збіглися, тобто обидві монети показуються гербом або решкою, то гравець *A* виграє монету гравця B, а якщо ні, то гравець *A* програє свою монету гравцеві *B*. Матриця гри може бути записана в такий спосіб:

Стратегії гравців		Гравець *B*	
		Решка	Герб
Гравець *A*	Решка	1	–1
	Герб	–1	1

У цій грі перші стратегії обох гравців складаються у виборі й пред'явленні решки, а другі стратегії – у виборі й пред'явленні герба. Якщо обидва гравця вибрали однакові стратегії, то виграє перший гравець, якщо гравці вибрали різні стратегії, то виграє другий гравець.

Приклад 6.2. Формалізація конфліктної ситуації між двома фірмами у вигляді матричної гри.

Нехай на деякому ринку програмного забезпечення діють дві сильні фірми *A* й *B*, які ведуть розробку різноманітних програмних продуктів паралельно. Програмні продукти, що розробляються, можуть виходити доброї якості (Д) і не дуже вдалими (Н). Нехай у кожну свою розробку спочатку фірми вкладають по *a* одиниць коштів. Припустимо для простоти також, що питання пустити в продаж програмний продукт або вкласти в нього додаткові кошти в розмірі *b* одиниць коштів завжди першою вирішує фірма *A*. Якщо фірма *A* пускає в продаж свій програмний продукт, то фірма *B* також це робить негайно. При цьому та фірма, що має краще програмне забезпечення, одержує від продажу 2*a* одиниць коштів, а друга фірма не одержує нічого. Якщо ж програмне забезпечення однієї якості (в обох фірм добре або невдале), то кожна з фірм покриває свої витрати, одержуючи по *a* одиниць коштів за рахунок продажу своєї продукції. Якщо фірма *A* не пускає в продаж своє програмне забезпечення, а вкладає в нього додаткові кошти, то у фірми *B* є в розпорядженні дві альтернативи:

- або вона відмовляється від подальшої розробки й зазнає збитків у розмірі a одиниць коштів, а фірма A після доробки свого програмного забезпечення й продажу одержує $(2a + b)$ одиниць коштів;
- або фірма B вкладає додаткові кошти в розмірі b одиниць й пускає після цього товар у продаж, після чого й фірма A також змушена пустити свою розробку в продаж. Якщо у обох фірм програмні продукти однієї якості, то фірми окупають свої витрати на розробку, одержуючи від продажу по $(a + b)$ грошових одиниць. Якщо ж програмні продукти різної якості, то фірма із кращим програмним забезпеченням одержує $2(a + b)$ одиниць коштів, а друга фірма не одержує нічого. Всі дії фірм можна виразити табл. 6.1, де фірма A є першим гравцем у матричній грі, а фірма B – другим.

Легко бачити, що фірма A має 4 різні стратегічні можливості. Перша з них – пустити в продаж, якщо у неї є добре програмне забезпечення, і пустити в продаж не дуже вдале програмне забезпечення. Скорочено це записується як «продаж – продаж». Інші стратегічні можливості фірми A такі: «продаж – додаткові кошти», «додаткові кошти – продаж», «додаткові кошти – додаткові кошти». Аналогічно й фірма B має 4 стратегії, які докладно описано в табл. 6.1.

Розглянемо дії фірм, коли фірма A вибрала свою першу стратегію «продаж – продаж», а фірма B – свою першу стратегію «продаж, якщо продає фірма A … – продаж, якщо продає фірма A …». У випадку, якщо обома фірмами створене добре програмне забезпечення (Д, Д), обидві фірми компенсують свої витрати на розробку за рахунок продажу програмних продуктів. Те саме відбувається й у випадку не дуже вдалих програмних продуктів (Н, Н).

У випадку, якщо фірма A має кращий програмний продукт, ніж фірма B (Д, Н), то вона одержує від продажу $2a$ одиниць коштів, а фірма B зазнає збитків у розмірі «$-a$» одиниць. У випадку, якщо фірма B має кращий програмний продукт (Н, Д), то вона одержує від продажу $2a$ одиниць коштів, а фірма A зазнає збитків у розмірі «$-a$» одиниць.

Таблиця 6.1 – Матрична гра

Добре ПЗ		Продаж, якщо продає фірма *A*, і відмова від подальших розробок, якщо фірма *A* вкладає додаткові кошти	Продаж, якщо продає фірма *A*, і відмова від подальших розробок, якщо фірма *A* вкладає додаткові кошти	Продаж, якщо продає фірма *A*, і вкладення додаткових коштів, якщо фірма *A* вкладає додаткові кошти	Продаж, якщо продає фірма *A*, і вкладення додаткових коштів, якщо фірма *A* вкладає додаткові кошти
	Невдале ПЗ	Продаж, якщо продає фірма *A*, і відмова від подальших розробок, якщо фірма *A* вкладає додаткові кошти	Продаж, якщо продає фірма *A*, і вкладення додаткових коштів, якщо фірма *A* вкладає додаткові кошти	Продаж, якщо продає фірма *A*, і відмова від подальших розробок, якщо фірма *A* вкладає додаткові кошти	Продаж, якщо продає фірма *A*, і вкладення додаткових коштів, якщо фірма *A* вкладає додаткові кошти
Продаж	Продаж	0	0	0	0
Продаж	Додаткові кошти	$3a/4$	$2a/4$	$(a - b)/4$	$-b/4$
Додаткові кошти	Продаж	$a/4$	$(a + b)/4$	0	$b/4$
Додаткові кошти	Додаткові кошти	a	$(3a + b)/4$	$(a - b)/4$	0

Будемо вважати, що імовірність появи кожної із чотирьох описаних ситуацій дорівнює 0,25, тоді середній виграш фірм при багаторазовому повторенні ситуації буде дорівнювати нулю: $a_{11} = 0{,}25((-В_{ДД} + П_{ДД}) + (-В_{НН} + П_{НН}) + (-В_{ДН} + П_{ДН}) + (-В_{НД} + П_{НД}) = 0{,}25((-a + a) + (-a + a) + (-a + 2a) + (-a + 0)) = 0$, де $В_{ДД}$, $В_{НН}$, $В_{ДН}$, $В_{НД}$ – відповідно витрати фірми *А* при створенні програмних продуктів якості (Д, Д), (Н, Н), (Д, Н), (Н, Д); $П_{ДД}$, $П_{НН}$, $П_{ДН}$, $П_{НД}$ – відповідно кошти фірми *А* від продажу товару при створенні програмних продуктів якості (Д, Д), (Н, Н), (Д, Н), (Н, Д).

При розрахунку елементів a_{12}, a_{13}, a_{14} аналогічно одержуємо $a_{11} = a_{12} = a_{13} = a_{14} = 0$.

Розглянемо розрахунок інших елементів таблиці:

$$a_{21}= 0{,}25((-В_{ДД} + П_{ДД}) + (-В_{НН} + П_{НН}) + (-В_{ДН} + П_{ДН}) + (-В_{НД} + П_{НД}) = \\ = 0{,}25((-a + a) + (-(a + b)+ (2a + b)) + (-a + 2a) + (-(a + b)+ \\ + (2a + b)) = 0{,}75a;$$

$$a_{22}= 0{,}25((-В_{ДД} + П_{ДД}) + (-В_{НН} + П_{НН}) + (-В_{ДН} + П_{ДН}) + (-В_{НД} + П_{НД}) = \\ = 0{,}25((-a +a) + (-(a + b)+ (a + b)) + (-a + 2a) + (-(a + b)+ (2a + b)) = 0{,}5a;$$

$$a_{23}= 0{,}25((-В_{ДД} + П_{ДД}) + (-В_{НН} + П_{НН}) + (-В_{ДН} + П_{ДН}) + (-В_{НД} + П_{НД}) = \\ = 0{,}25((-a +a) + (-(a + b)+ (2a + b)) + (-a + 2a) + (-(a + b)+ 0) = \\ = 0{,}25(a - b);$$

$$a_{24}= 0{,}25((-В_{ДД} + П_{ДД}) + (-В_{НН} + П_{НН}) + (-В_{ДН} + П_{ДН}) + (-В_{НД} + П_{НД}) = \\ = 0{,}25((-a +a) + (-(a + b)+ (a + b)) + (-a + 2a) + (-(a + b)+ 0) = -0{,}25\, b;$$

$$a_{31}= 0{,}25((-В_{ДД} + П_{ДД}) + (-В_{НН} + П_{НН}) + (-В_{ДН} + П_{ДН}) + (-В_{НД} + П_{НД}) = \\ = 0{,}25(-(a + b)+ (2a + b)) + (-a+ a) + (-(a + b)+ (2a + b)) + (-a +0) = \\ = 0{,}25\, a;$$

$$a_{32}= 0{,}25((-В_{ДД} + П_{ДД}) + (-В_{НН} + П_{НН}) + (-В_{ДН} + П_{ДН}) + (-В_{НД} + П_{НД}) = \\ = 0{,}25(-(a + b)+ (2a + b)) + (-a+ a) + (-(a + b)+ 2(a + b)) + (-a +0) = \\ = 0{,}25(a + b);$$

$$a_{33}= 0{,}25((-В_{ДД} + П_{ДД}) + (-В_{НН} + П_{НН}) + (-В_{ДН} + П_{ДН}) + (-В_{НД} + П_{НД}) = \\ = 0{,}25(-(a + b)+ (a + b)) + (-a+ a) + (-(a + b)+ (2a + b)) + (-a +0) = 0;$$

$$a_{34}= 0{,}25((-В_{ДД} + П_{ДД}) + (-В_{НН} + П_{НН}) + (-В_{ДН} + П_{ДН}) + (-В_{НД} + П_{НД}) = \\ = 0{,}25(-(a + b)+ (a + b)) + (-a+ a) + (-(a + b)+ 2(a + b)) + (-a +0) = 0{,}25b;$$

$$a_{41} = 0{,}25((-В_{ДД} + П_{ДД}) + (-В_{НН} + П_{НН}) + (-В_{ДН} + П_{ДН}) + (-В_{НД} + П_{НД}) =$$
$$= 0{,}25(-(a + b) + (2a + b)) + (-(a + b) + (2a + b)) + (-(a + b) + (2a + b)) +$$
$$+ (-(a + b) + (2a + b)) = a;$$

$$a_{42} = 0{,}25((-В_{ДД} + П_{ДД}) + (-В_{НН} + П_{НН}) + (-В_{ДН} + П_{ДН}) + (-В_{НД} + П_{НД}) =$$
$$= 0{,}25(-(a + b) + (2a + b)) + (-(a + b) + (a + b)) + (-(a + b) + 2(a + b)) +$$
$$+ (-(a + b) + (2a + b)) = 0{,}25(3a + b);$$

$$a_{43} = 0{,}25((-В_{ДД} + П_{ДД}) + (-В_{НН} + П_{НН}) + (-В_{ДН} + П_{ДН}) + (-В_{НД} + П_{НД}) =$$
$$= 0{,}25(-(a + b) + (a + b)) + (-(a + b) + (2a + b)) + (-(a + b) + (2a + b)) +$$
$$+ (-(a + b) + 0) = 0{,}25(a - b);$$

$$a_{44} = 0{,}25((-В_{ДД} + П_{ДД}) + (-В_{НН} + П_{НН}) + (-В_{ДН} + П_{ДН}) + (-В_{НД} + П_{НД}) =$$
$$= 0{,}25(-(a + b) + (a + b)) + (-(a + b) + (a + b)) + (-(a + b) + 2(a + b)) +$$
$$+ (-(a + b) + 0) = 0.$$

Для першого гравця матриця гри є матрицею виграшів, тому аналіз першої й третьої стратегій першого гравця показує, що третя стратегія краща від першої стратегії. Дійсно, порівнюючи елементи першого й третього рядків матриці у відповідних стовпцях, маємо $0 < a/4$; $0 < (a + b)/4$; $0 = 0$; $0 < b/4$. Таким чином, тільки при третій стратегії другого гравця перша й третя стратегії першого гравця рівноцінні. У всіх інших випадках перша стратегія поступається третій, оскільки на відміну від третьої стратегії вона не приносить виграшів першому гравцеві, тобто застосовувати першу стратегію першому гравцеві невигідно. Аналогічно, четверта стратегія першого гравця перевершує його другу стратегію. Отже, і другу стратегію першому гравцеві застосовувати нема сенсу. Таким чином, кількість стратегій, які застосовує перший гравець, зменшується до двох, тому вихідну матричну гру розмірами 4×4 можна перетворити до гри розмірами 2×4 (табл. 6.2).

Для другого гравця матриця гри є матрицею програшів, тому неважко бачити, що перша стратегія другого гравця гірша від третьої стратегії, а друга стратегія – від четвертої, оскільки елементи відповідно третього й четвертого стовпців матриці менші за відповідні елементи першого й другого стовпців, тому застосовувати першу й другу стратегію другому гравцеві нема сенсу. Отже, рішення розглянутої гри може бути зведене до розв’язання матричної гри 2×2

0	$b/4$
$(a-b)/4$	0

Таблиця 6.2 – Матрична гра

Добре ПЗ		Продаж, якщо продає фірма *A*, і відмова від подальших розробок, якщо фірма *A* вкладає додаткові кошти	Продаж, якщо продає фірма *A*, і відмова від подальших розробок, якщо фірма *A* вкладає додаткові кошти	Продаж, якщо продає фірма *A*, і вкладення додаткових коштів, якщо фірма *A* вкладає додаткові кошти	Продаж, якщо продає фірма *A*, і вкладення додаткових коштів, якщо фірма *A* вкладає додаткові кошти
	Невдале ПЗ	Продаж, якщо продає фірма *A*, і відмова від подальших розробок, якщо фірма *A* вкладає додаткові кошти	Продаж, якщо продає фірма *A*, і вкладення додаткових коштів, якщо фірма *A* вкладає додаткові кошти	Продаж, якщо продає фірма *A*, і відмова від подальших розробок, якщо фірма *A* вкладає додаткові кошти	Продаж, якщо продає фірма *A*, і вкладення додаткових коштів, якщо фірма *A* вкладає додаткові кошти
Додаткові кошти	Продаж	$a/4$	$(a+b)/4$	0	$b/4$
Додаткові кошти	Додаткові кошти	a	$(3a+b)/4$	$(a-b)/4$	0

Приклад 6.3. *Гра Бореля*. Гра Бореля була запропонована видатним французьким математиком у 1921 році. У цій грі два гравці *A*, *B* вибирають по три невід’ємних числа, сума яких дорівнює одиниці, а саме:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1 \text{ і } y_1 + y_2 + y_3 = 1,$$

і розташовують їх у певному порядку. Гравець A або B виграє, якщо два обраних ним числа більші за відповідні числа супротивника.

Приклад 6.4. *Два узагальнення гри Бореля*. При першому узагальненні гравці вибирають по n невід’ємних чисел, що задовольняють умовам

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1, \quad \sum_{i=1}^{n} y_i = 1, \tag{6.1}$$

і розташовують їх у певному порядку. Виграє гравець, у якого більша кількість чисел перевершує числа іншого гравця.

При другому узагальненні гравці також вибирають по n невід’ємних чисел, що задовольняють умовам (6.1), але при цьому виграє гравець, у якого більша сума обумовлена виразами:

$$S_A = \sum_{i=1}^{n} f(x_i), \quad S_B = \sum_{i=1}^{n} f(y_i),$$

де f – задана функція.

Гра Бореля може стати грою на розорення.

Гра на розорення – багатокрокова гра, починаючи яку кожен гравець має обмежені ресурси й у якій з кожним кроком або партією ресурси гравця, що програв, зменшуються, наприклад, на одиницю, на ціну гри або на значення, що обчислюється яким-небудь іншим способом.

Гра на розорення може бути сформульована як гра на виграш, якщо вважати, що гравці починають гру з нульовими ресурсами, а потім на кожному кроці ресурси гравця, що виграв, збільшуються на одиницю або на ціну зіграної партії, або на значення, що обчислюється яким-небудь іншим способом.

Приклад 6.5. *Гра Блотто*. Гра Бореля дістала розвитку в так званій грі полковника Блотто – прозивне ім'я учасника багатьох ілюстративних ігор, що мають застосування у військовій сфері. Розглянемо приклад однієї з таких ігор.

Два гравці *A* і *B* ведуть боротьбу на *N* незалежних театрах взаємодії (ринках збуту, зонах військового конфлікту і т. д.), позначених числами 1. 2. …, *N*. Вони повинні розподілити свої сили (ресурси), відповідно *F* і *G* одиниць по театрах взаємодії, не знаючи схеми розподілу протидіючого гравця. Платіж (тобто чисельна міра виграшу гравця *A* або збитки гравця *B*) на *i*-му театрі виражається функцією $P_i(x, y)$, що залежить від *i*-го театру та співвідношення ресурсів *x* і *y*, вкладених гравцями в цей театр взаємодії. Платіж гри в цілому дорівнює сумі платежів на окремих театрах. Нехай боротьба йде на двох театрах, і у гравця *A* є 4 одиниці ресурсів, а у його противника *B* – 3, які треба розподілити між театрами. Платіж визначається таким чином. Гравець отримує суму своїх витрат і витрат противника на театрі, якщо він за вкладеннями перевершує противника, і отримує свої витрати, якщо вкладення рівні або противник не вкладав ресурсів у цей театр дій. Якщо вкладення гравця менші, ніж у його противника, то він не отримує нічого. Загальний платіж дорівнює сумі платежів на обох театрах дій. Результати взаємодії гравців наведено в табл. 6.3.

Таблиця 6.3 – Результати взаємодії гравців

Стратегії	(3, 0)	(0, 3)	(2, 1)	(1, 2)
(4, 0)	(7, 0)	(4, 3)	(6, 1)	(5, 2)
(0, 4)	(4, 3)	(7, 0)	(5, 2)	(6, 1)
(3, 1)	(4, 3)	(3, 4)	(6, 1)	(4, 3)
(1, 3)	(3, 4)	(4, 3)	(4, 3)	(6, 1)
(2, 2)	(2, 5)	(2, 5)	(5, 2)	(5, 2)

За кожною клітинкою матриці переховується або закінчення гри, як у разі одночасного застосування перших або других стратегій обома гравцями, або продовження гри с тими самими (наприклад, після застосування стратегій (1, 2) або (2, 1), або іншими ресурсами (наприклад, після застосування першим гравцем першої стратегії, а другим – четвертої). В останньому випадку буде розігруватися гра, що наведена в табл. 6.4.

У грі Блотто виграє той, хто виснажить ресурси противника.

Таблиця 6.4 – Результати взаємодії гравців

Стратегії	(2, 0)	(0, 2)	(1, 1)
(5, 0)	(7, 0)	(5, 2)	(6, 1)
(0, 5)	(5, 2)	(7, 0)	(6, 1)
(4, 1)	(7, 0)	(4, 3)	(6, 1)
(1, 4)	(4, 3)	(7, 0)	(6, 1)
(3, 2)	(7, 0)	(5, 2)	(7, 0)
(2, 3)	(5, 2)	(7, 0)	(7, 0)

6.3. Контрольні запитання та завдання

6.3.1. Контрольні запитання

1. Теорія ігор як основа моделей конфліктних ситуацій.
2. Класифікація ігор.
3. Описати матричну гру двох гравців.
4. Нижня і верхня ціна матричної гри.
5. Чисті та змішані стратегії у матричних іграх. Домінування стратегій в матричних іграх. Спрощення матричних ігор на основі домінування окремих стратегій та їх комбінацій.
6. Поняття сідлової точки. Сідлові точки матричних ігор в чистих і змішаних стратегіях.
7. Гра Бореля та її узагальнення.
8. Ігри Блотто.
9. Багатокрокові ігри.

6.3.2. Завдання

1. Формалізувати конфліктну ситуацію у вигляді гри, де у кожного з гравців є не менш чотирьох стратегій.
2. Дослідити розроблену гру з метою визначення її ціни й оптимальних стратегій кожного з гравців.
3. Формалізувати конфліктну ситуацію у вигляді гри з сідловою точкою у чистих стратегіях.
4. Розробити матричну гру з двома сідловими точками у чистих стратегіях.

7. РОЗВ‘ЯЗАННЯ МАТРИЧНИХ ІГОР МЕТОДОМ ПОСЛІДОВНОГО НАБЛИЖЕННЯ ЦІНИ ГРИ

7.1. Числовий метод розв’язання матричних ігор методом послідовного наближення ціни гри

Розв’язання матричних ігор при розмірах матриць $n \times m$, більших або таких, що дорівнюють 3×3, та відсутності сідлових точок у чистих стратегіях або можливості зменшити розміри матриці за допомогою вилучення домінуючих стратегій у загальному випадку можливе тільки за допомогою числових методів. Розглянемо один із таких методів – метод послідовного наближення ціни гри. У цьому методі послідовно розігрується багато партій. У кожній партії обидва гравця вибирають ті стратегії, які дають їм найбільший сумарний виграш у всіх партіях, включаючи поточну. Після кожної партії матричної гри обчислюється середнє значення виграшу v_1 в одній партії першого гравця, середнє значення програшу v_2 в одній партії другого гравця та півсума v_1 й v_2, що береться за наближене значення ціни матричної гри v:

$$v_1 = \frac{1}{N} \max(S_1^1, S_2^1, \ldots, S_n^1);$$

$$v_2 = \frac{1}{N} \min(S_1^2, S_2^2, \ldots, S_m^2);$$

$$v = \frac{v_1 + v_2}{2},$$

де N – номер партії, що розігрується; $S_1^1, S_2^1, \ldots, S_n^1$ – виграші першого гравця в N партіях відповідно при застосуванні своїх першої, другої, …, n-ї чистої стратегії; n – кількість чистих стратегій першого гравця; $S_1^2, S_2^2, \ldots, S_m^2$ – програші другого гравця в N партіях відповідно при застосуванні своїх першої, другої, …, m-ї чистої стратегії; m – кількість чистих стратегій другого гравця.

Для визначення оптимальних змішаних стратегій обох гравців підраховуються частоти f_i^1 $(i = \overline{1,\ n})$, f_j^2 $(i = \overline{1,\ m})$ застосування кожної чистої стратегії відповідно першого та другого гравців. Ці частоти беруть за наближені значення імовірностей застосування відповідних чистих стратегій в оптимальних змішаних стратегіях обох гравців.

Доведено, що при необмеженому збільшенні кількості партій середній виграш першого гравця та середній програш другого гравця необмежено прагнуть до ціни гри. Якщо розв'язок матричної гри єдиний, то наближені значення змішаних стратегій обох гравців необмежено наближаються до їх оптимальних змішаних стратегій.

Обсяг обчислень у цьому методі пропорційний сумі кількості рядків та стовпців вихідної матриці гри.

7.2. Приклад розв'язання матричної гри

Розглянемо приклад розв'язання матричної гри методом послідовного наближення ціни гри. Нехай гра задана такою матрицею:

$$A = \begin{vmatrix} 50 & 15 & 20 \\ 25 & 40 & 30 \\ 10 & 30 & 60 \end{vmatrix}.$$

Застосування будь-якого числового методу для розв'язання матричної гри необхідно починати з визначення нижньої чистої ціни гри α та верхньої чистої ціни гри β. Це дозволить уникнути застосування числових методів розв'язання матричних ігор у тих випадках, коли розв'язок може бути знайдений у чистих стратегіях. У нашому випадку маємо

$$\alpha = \max_i \min_j a_{ij} = \max(15, 25, 10) = 25;$$

$$\beta = \min_j \max_i a_{ij} = \min(50, 40, 60) = 40.$$

Отже, $\alpha \neq \beta$ й розв'язання матричної гри необхідно шукати числовим методом. Припустимо, що в першій партії другий гравець вибрав свою першу стратегію, тоді, якщо перший гравець вибере свою першу стратегію, то він виграє 50 одиниць, якщо другу – 25 одиниць, якщо третю – 10 одиниць. Зведемо отримані результати в таблицю 7.1.

Таблиця 7.1 – Числовий метод розв’язання матричної гри

Номер партії N	Стратегія другого гравця	Сумарний виграш першого гравця за стратегіями			Стратегія першого гравця	Сумарний виграш другого гравця за стратегіями			Середнє значення виграшу v_1 першого гравця	Середнє значення програшу v_2 другого гравця	Ціна гри v
		S_1^1	S_2^1	S_3^1		S_1^2	S_2^2	S_3^2			
		1	2	3		1	2	3			
1	1	50	25	10	1	50	15	20	50	15	32,50
2	2	65	65	40	1	100	30	40	65/2	30/2	23,75
3	2	80	105	70	2	125	70	70	105/3	70/3	29,17
4	2	95	145	100	2	150	110	100	145/4	100/4	30,62
5	3	115	175	160	2	175	150	130	175/5	130/5	30,50
6	3	135	205	220	3	185	180	190	220/6	180/6	33,33
7	2	150	245	250	3	195	210	250	250/7	195/7	31,78
8	1	200	270	260	2	220	250	280	270/8	220/8	30,62
9	1	250	295	270	2	245	290	310	295/9	245/9	29,44
10	1	300	320	280	2	270	330	340	320/10	270/10	29,50
11	1	350	345	290	1	320	345	360	350/11	320/11	30,45
12	1	400	370	300	1	370	360	380	400/12	360/12	31,67
13	2	415	410	330	1	420	375	400	415/13	375/13	30,38
14	2	430	450	360	2	445	415	430	450/14	415/14	30,89
15	2	445	490	390	2	470	455	460	490/15	455/15	31,50
16	2	460	530	420	2	495	495	490	530/16	490/16	31,88
17	3	480	560	480	2	520	535	520	560/17	520/17	31,76
18	3	500	590	540	2	545	575	550	590/18	545/18	31,53
19	1	550	615	550	2	570	615	580	615/19	570/19	31,18
20	1	600	640	560	2	595	655	610	640/20	595/20	30,88
21	1	650	665	570	2	620	695	640	665/21	620/21	30,60
22	1	700	690	580	1	670	710	660	700/22	660/22	30,91
23	3	720	720	640	1	720	725	680	720/23	680/23	30,43
24	3	740	750	700	2	745	765	710	750/24	710/24	30,42
25	3	760	780	760	2	770	805	740	780/25	740/25	30,40

З аналізу колонки «Сумарний виграш першого гравця за стратегіями» (табл. 7.1) випливає, що перша стратегія першого гравця приносить йому найбільший виграш. Тому перший гравець і повинен вибрати свою першу чисту стратегію (див. колонку «Стратегія першого гравця» у табл. 7.1). У цьому випадку, якщо другий гравець вибирає свою першу стратегію, то він програє 50 одиниць, якщо другу – 15 одиниць, якщо третю – 20 одиниць. Найбільший виграш, що може одержати перший гравець у першій партії, дорівнює 50 одиницям, оскільки

$$v_1 = (\max(S_1^1, S_2^1, S_3^1))/1 = \max(50, 25, 10) = 50.$$

Аналогічно виходить найменший можливий програш другого гравця

$$v_2 = (\min(S_1^2, S_2^2, S_3^2))/1 = \min(50, 15, 20) = 15.$$

Знаючи v_1 та v_2, нескладно обчислити їхню півсуму, тобто наближене значення ціни гри після першої партії: v = (50 + 15)/2 = 32,5.

Оскільки кращий результат у першій партії другому гравцеві принесла друга стратегія (програш дорівнює 15 одиницям), то він її й повинен вибрати в другій партії. У цьому випадку застосування першої стратегії першим гравцем принесе йому виграш в 15 одиниць. Підсумовуючи його з виграшем, отриманим за допомогою цієї ж стратегії в першій партії, одержуємо 65 одиниць.

Застосування першим гравцем своєї другої стратегії в поточній партії приносить йому виграш в 40 одиниць та сумарний виграш у двох партіях – 65 одиниць. Аналогічно, застосування третьої стратегії першим гравцем приносить йому виграш у поточній партії в 30 одиниць та сумарний виграш у двох партіях – 40 одиниць. Найбільший виграш у двох партіях першому гравцеві забезпечили відразу дві стратегії: перша й друга.

У загальному випадку з погляду забезпечення стійкості рішення в наступній партії краще вибирати ту стратегію, що була в попередній партії. Тому в другій партії перший гравець застосовує свою першу стратегію. Якщо у відповідь на це другий гравець вибирає свою першу стратегію, то він програє в поточній партії 50 одиниць й 100 одиниць у двох партіях; якщо він вибирає другу стратегію, то програє в другій партії 15 одиниць й 30 одиниць у двох партіях; якщо він вибирає третю стратегію, то відповідно програє 20 й 40 одиниць. Середній виграш першого гравця у двох партіях становить v_1= 65/2 = 32,5; середній програш другого гравця у двох партіях v_2=30/2 = 15. Наближене значення ціни гри за результатами двох партій

$$v = (v_1 + v_2)/2 = (32{,}5 + 15)/2 = 23{,}75.$$

У третій і наступній партіях процес обчислень і заповнення таблиці 7.1 відбувається аналогічно.

Після 25-ї партії маємо такі наближені значення ціни гри й компонент змішаних стратегій відповідно першого й другого гравців: v = 30,40; x = (0,280; 0,640; 0,080); y = (0,400; 0,320; 0,280). Зіставлення з точним розв'язком цієї матричної гри методом лінійного програмування (v = 30,77; x = (0,314; 0,554; 0,132); y = (0,409; 0,289; 0,302)) показує задовільну точність у визначенні ціни гри й значну похибку у визначенні компонентів змішаних стратегій обох гравців. Ця похибка пояснюється тим, що в розглянутому числовому методі застосовувані гравцями стратегії змінюються не після однієї, двох або трьох партій, а нерегулярно: вісім разів підряд у партіях з 14-ї до 21-ї застосовувалася друга стратегія першого гравця; п'ять разів підряд (партії 8–12) – перша стратегія другого гравця; в 18 партіях підряд (з 8-ї до 25-ї) не застосовувалася третя стратегія першого гравця й т. д. Для того щоб ця нерегулярність не впливала істотно на кінцевий результат, необхідний розрахунок сотень партій. Дійсно, якщо зажадати, щоб похибка δ визначення компонентів змішаних стратегій не перевищувала, припустимо, 0,01, а в послідовності партій спостерігалися m-кратні появи підряд однієї зі стратегій кожного із гравців, то, у першому наближенні, кількість партій N можна оцінити в такий спосіб:

$$N \ge \frac{m}{\delta},$$

де m – найбільша кратність появи підряд однієї зі стратегій кожного із гравців.

При m = 8, δ = 0,01 кількість партій має бути не менше 800.

Для точного визначення ціни гри в загальному випадку також необхідна велика кількість партій. Дійсно, аналіз останнього стовпця табл. 7.1 показує істотні коливання ціни гри, які зменшуються при зростанні сумарного виграшу першого гравця й програшу другого гравця.

7.3. Контрольні запитання та завдання

7.3.1. Контрольні запитання

1. Методи визначення оптимальних змішаних стратегій в матричних іграх.

2. Як визначається нижня чиста ціна гри α?

3. Як визначається верхня чиста ціна гри β?

4. Як визначається ціна гри, якщо $\alpha = \beta$?

5. Рішення матричних ігор методом послідовного наближення ціни гри.

7.3.2. Завдання

1. Формалізувати конфліктну ситуацію у вигляді матричної гри при розмірах матриці не менше 3×3 й відсутності сідлових точок у чистих стратегіях.

2. Розробити алгоритм числового розв’язання матричної гри методом послідовного наближення ціні гри. Особливу увагу звернути на умови зупинення обчислювального процесу.

3. Розробити програму, що реалізує алгоритм числового розв’язання матричної гри розглянутим методом.

8. РОЗВ‘ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ ІЗ ВИКОРИСТАННЯМ ВЕКТОРНИХ КРИТЕРІЇВ

8.1. Розв’язання задач із векторними критеріями

Нехай задана множина об'єктів $X = \{x_1, ..., x_n\}$, кожний з яких оцінюється векторним критерієм з m компонентами $K = (k_1,\ ...,\ k_m)$. Потрібно за допомогою критерію *K* з множини об'єктів *X* виділити кращий об'єкт.

Для розв’язання сформульованої задачі кожний з об'єктів множини $X = \{x_1, ..., x_n\}$ оцінимо за допомогою компонентів $k_1,\ ...,\ k_m$ векторного критерію, і результати цієї оцінки відобразимо в табл. 8.1. Будемо розглядати після цього об'єкти $x_1,\ ...,\ x_n$ просто як набори відповідних до них числових значень показників $(k_1(x_1),\ ...,\ k_m(x_1)),\ ...,$ $(k_1(x_n),\ ...,\ k_m(x_n))$, що включають у себе всю інформацію про основні об'єкти. У результаті такого переходу порівняння початкових об'єктів за критерієм *K* зводиться до порівняння рядків (табл. 8.1).

Таблиця 8.1 – Компоненти векторного критерію

Компоненти	k_1	…	k_j	…	k_m
x_1	$k_1(x_1)$	...	$k_j(x_1)$	...	$k_m(x_1)$
. . .	. . .	... ...	. . .	... ...	. . .
x_i	$k_1(x_i)$	...	$k_j(x_i)$	...	$k_m(x_i)$
. . .	. . .	... ...	. . .	... ...	. . .
x_n	$k_1(x_n)$	...	$k_j(x_n)$	...	$k_m(x_n)$

Для виділення кращого об'єкта за допомогою табл. 8.1 необхідний набір правил, що дозволяє порівнювати будь-яку пару об'єктів $x_k,\ x_l \in X$ та встановлювати, чи є один з об'єктів переважнішим за інший чи ні. Такий набір правил називається системою вирішальних правил. Розглянемо декілька типів вирішальних правил, що найчастіше застосовуються. Однак спочатку для спрощення наступного викладу (але без втрати загальності) припустимо, що використовується такий векторний критерій як

$K = (k_1, \ldots, k_m)$, і що значення будь-якого компонента k_j $(j = \overline{1, m})$ відносно кожного об'єкта x_i тим переважніше (краще), чим воно більше.

8.1.1. Правило абсолютної переваги

Об'єкт x_k вважається кращим від об'єкта x_l тоді й тільки тоді, коли для всіх компонентів векторного критерію $K = \{k_1, \ldots, k_m\}$ виконуються співвідношення

$$k_j(x_k) \geq k_j(x_l), \; j = \overline{1, m}, \tag{8.1}$$

де символ « $\geq$ » може мати два різних значення:

- об'єкт x_k за компонентом k_j векторного критерію кращий за об’єкт x_l або еквівалентний йому;
- числове значення компонента k_j векторного критерію для об'єкта x_k більше або дорівнює числовому значенню цього компонента для об'єкта x_l.

Таким чином, це вирішальне правило припускає, що кращий об'єкт не гірший від іншого об'єкта за жодним компонентом векторного критерію. Для практичного застосування зручніше використати вираз (8.1) із символом «більше або дорівнює». Тому надалі символ « $\geq$ » будемо використовувати саме в цьому значенні.

Приклад 8.1. Потрібно із чотирьох місць роботи (*A*, *B*, *C*, *D*) вибрати краще. При цьому кожне місце роботи оцінюється за чотирма показниками (k_1, k_2, k_3, k_4): за величиною заробітної плати, тривалістю відпустки, часом поїздки на роботу й перспективою майбутнього зростання співробітника (табл. 8.2).

Безпосередньо розв'язати цю задачу, застосовуючи правило абсолютної переваги, не можна, оскільки для оцінки місць роботи використовується один якісний показник (перспектива зростання) й один показник (час поїздки на роботу), що не задовольняє припущення про те, що чим його значення більше, тим альтернатива краща. У зв'язку із цим необхідно перетворити початкову задачу.

Таблиця 8.2 – Оцінки показників

Місце роботи	Величина заробітної плати, грн	Тривалість відпустки, дні	Час поїздки на роботу, хв	Перспектива зростання
A	1800	30	20	Повільне зростання
B	1400	30	30	Повільне зростання
C	1200	48	40	Швидке зростання
D	2400	24	10	Відсутність зростання

Для цього замість показника k_3 (час поїздки на роботу) уведемо показник економії часу порівняно з часом самої тривалої поїздки на роботу: $k_3^* = 40 - k_3$.

Замість якісного показника k_4 уведемо кількісний показник k_4^* за допомогою табл. 8.3.

З вектором показників $(k_1,\ k_2,\ k_3^*,\ k_4^*)$ табл. 8.2 перетвориться до нового вигляду (табл. 8.4).

Відносно альтернатив табл. 8.4 співвідношення (8.1) виконуються тільки для єдиної пари місць роботи *A* і *B*: місце роботи *A* краще за місце роботи *B* за показниками k_1 й k_3^* та однакове з ним за показниками k_2 й k_4^*. Для інших пар альтернатив (місць роботи) установити перевагу за допомогою правила абсолютної переваги не вдається. Подібна ситуація спостерігається й при розв'язанні інших задач із векторним критерієм за допомогою цього правила.

Таблиця 8.3 – Оцінки кількісного показника

k_4	k_4^*
Відсутність перспективи службового зростання співробітника в майбутньому	0
Повільне службове зростання співробітника в майбутньому	1
Середня швидкість службового зростання співробітника в майбутньому	2
Швидке зростання за службовим становищем співробітника в майбутньому	3

Таблиця 8.4 – Вектор показників $(k_1,\ k_2,\ k_3^*,\ k_4^*)$

Місце роботи	k_1	k_2	k_3^*	k_4^*
A	1800	30	20	1
B	1400	30	10	1
C	1200	48	0	2
D	2400	24	30	0

Основний недолік правила абсолютної переваги полягає у вузькій сфері його застосовності. Інакше кажучи, воно є «слабким», оскільки застосовується для розв'язання невеликої кількості практичних задач.

Важливою перевагою правила абсолютної переваги є його транзитивність, тобто, якщо альтернатива A краща від альтернативи B ($A > B$), яка, у свою чергу, краща від альтернативи C ($B > C$), то альтернатива A краща від альтернативи C ($A > C$).

8.1.2. Перевага за правилом більшості

Для одержання більш сильного правила, ніж правило абсолютної переваги, припустимо, що альтернатива x_k краща від альтернативи x_l, якщо співвідношення (8.1) виконуються не для всіх показників, а тільки для більшості. Якщо альтернатива x_k за частиною показників краща від альтернативи x_l й за такою ж кількістю показників поступається їй, то альтернативи x_k й x_l вважаються еквівалентними ($x_k \approx x_l$) або нерозрізненими (однаковими). Застосовуючи це правило до табл. 8.4, одержимо

$$A > B,\ A \approx C,\ A \approx D,\ B \approx C,\ B \approx D,\ C \approx D.$$

Таким чином, за правилом більшості всі альтернативи порівняні між собою. Однак вибрати кращу альтернативу в розглянутому прикладі за допомогою цього правила не вдається, оскільки порушується відношення транзитивності $A \approx C$, $C \approx B$, але $A > B$.

Таке порушення транзитивності при визначенні переваги за правилом більшості іноді називають парадоксом голосування при застосуванні правила більшості.

8.1.3. Виділення кращих об'єктів за допомогою таблиць балових оцінок

Якщо в третьому стовпці табл. 8.4 число 20 замінити на 2, 10 на 1 й 30 на 3, то формально за показником k_3^* при використанні співвідношень (8.1) залишається колишня перевага між альтернативами, що аналізуються, а фактично для людини, що вибирає місце роботи, ситуація змінилася, оскільки за третім показником всі альтернативи стали однаковими. У зв'язку із цим числове завдання показників не завжди зручне. Часто краще користуватися не конкретними числовими значеннями в певних одиницях, а деякими більш загальними оцінками, які можна задати в абстрактних одиницях або балах. При цьому для кожного показника встановлюється певна кількість рівнів відмінності або градацій. Як нижчий бал задають 0 або 1, а при переході до наступного рівня значення показника збільшується на один бал.

Таблицю значення показників у якій виражені в балах, називають таблицею балових оцінок (табл. 8.1).

Розглянемо приклад використання таблиці балових оцінок для виділення кращих альтернатив.

Приклад 8.2. Нехай потрібно виявити перевагу покупця ПЕОМ серед моделей машин, позначених буквами *A, B, C, D, E, F, G*. Оцінки цих моделей наведено в табл. 8.5 за такими шістьма показниками:

k_1 – ціна (сім градацій);

k_2 – тактова частота (чотири градації);

k_3 – обсяг оперативної пам'яті (п'ять градацій);

k_4 – обсяг пам'яті вінчестера (п'ять градацій);

k_5 – зовнішнє оформлення (чотири градації);

k_6 – надійність (чотири градації).

Уведемо таке вирішальне правило: альтернатива X краща від альтернативи Y, якщо кількість показників, за якими альтернатива X перевершує альтернативу Y, більше від кількість показників, за якими вона поступається альтернативі Y.

При цьому вирішальному правилі відношення переваги між альтернативами табл. 8.5 визначається табл. 8.6.

У табл. 8.6 одиниця на перетині i-го рядка й j-го стовпця вказує на домінування i-ї альтернативи над j-ю. Якщо на перетині i-го рядка й j-го стовпця та j-го рядка й i-го стовпця перебуває нуль, то альтернативи еквівалентні.

Таблиця 8.5 – Оцінки показників

Моделі машин	k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	k_6
A	6	4	4	2	2	3
B	5	3	5	4	1	2
C	4	2	4	3	3	1
D	6	4	5	5	2	3
E	2	2	3	4	4	2
F	7	1	2	2	1	2
G	6	4	3	3	4	4

Аналіз даних табл. 8.6 показує, що альтернативи *D* та *G* кращі за всі інші. За цим вирішальним правилом альтернативи *D* та *G* рівнозначні, тому що альтернатива *D* перевершує альтернативу *G* за двома показниками (k_3 й k_4) і поступається їй також за двома показниками (k_5 й k_6), а за показниками k_1 й k_2 обидві альтернативи мають однакові значення.

Таблиця 8.6 – Відношення переваг між альтернативами

Моделі машин	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*
A	0	1	1	0	1	1	0
B	0	0	1	0	1	1	0
C	0	0	0	0	0	1	0
D	1	1	1	0	1	1	0
E	0	0	1	0	0	1	0
F	0	0	0	0	0	0	0
G	1	1	1	0	1	1	0

8.1.4. Зведення векторного критерію до скалярного

Нехай у табл. 8.1 альтернативи оцінюються за *m* кількісними показниками k_j $(j = \overline{1,\ m})$. Нехай значущість кожного з показників характеризується ваговим коефіцієнтом a_j, а кожна альтернатива x_i $(i = \overline{1,\ n})$ – зваженою сумою

$$K(x_i) = \sum_{j=1}^{m} a_j k_j (x_i).$$

Вирішальне правило в цьому випадку може бути уведене в такий спосіб: альтернатива x_k перевершує альтернативу x_l, якщо $K(x_k) > K(x_l)$.

Це вирішальне правило є гранично сильним, оскільки воно приводить до числової оцінки кожної альтернативи й, отже, до відношення порядку ≥ між альтернативами.

Недолік цього вирішального правила полягає у тому, що з його допомогою векторний критерій перетворюється в скалярний, хоча компоненти векторного критерію можуть якісно відрізнятися один від одного. Проте, цей критерій широко застосовується в техніці.

8.1.5. Зведення багатокритеріальної задачі до пошуку екстремуму єдиної мети в умовах обмежень

Це достатньо раціональний та розповсюджений метод розв'язання задач із векторним критерієм. Найчастіше він застосовується в такий спосіб. Послідовно оптимізують одну із цілей, розглядаючи інші цілі як обмеження. У результаті такої послідовної оптимізації при m компонентах векторного критерію може бути отримана множина із m рішень, вибір кращого з яких у загальному випадку не є тривіальним завданням. Крім того, при розв'язанні кожної оптимізаційної задачі обмеження в загальному випадку звужують область пошуку оптимуму більшою або меншою мірою довільно. Це нерідко приводить до ситуації, коли дійсно оптимальне рішення знайти не вдається.

Приклад 8.3. Розв'яжемо задачу із прикладу 8.2 розглянутим методом. Оскільки у цій задачі використовується векторний критерій із шістьома компонентами, то застосування методу, що зводить багатокритеріальну задачу до пошуку екстремумів за окремими критеріями в умовах обмежень, приводить до послідовного розв'язання шести оптимізаційних задач. При розв'язанні першої із шести задач шукаються альтернативи, що оптимальні за першим компонентом k_1 векторного критерію. За іншими п'ятьма компонентами векторного критерію задаються обмеження. Нехай вони будуть такими: за всіма компонентами альтернативи, що обираються, не повинні набувати найменших значень, тобто мають виконуватися умови

$$\begin{aligned} &k_j(\cdot) > 1, \;\; j = 2, 5, 6; \\ &k_j(\cdot) > 2, \;\; j = 3, 4. \end{aligned} \tag{8.2}$$

Якби не було обмежень, то кращої за першим критерієм була б альтернатива *F*, однак через порушення обмежень (8.2) вона обрана бути не може. Зіставлення даних табл. 8.5 й обмежень (8.2) дозволяє встановити, що обмеження задовольняють тільки альтернативи *D*, *E* та *G*. Оскільки $k_1(D)$ = $k_1(G)$ = 6 та $k_1(E)$ = 2, то кращими й рівноцінними за критерієм k_1 є альтернативи *D* та *G*.

При пошуку оптимальних альтернатив за критерієм k_2 будемо припускати, що обмеження за критеріями $k_3 - k_6$ залишаються такими ж, як і при розв'язанні першої задачі, а обмеження за першим критерієм задається співвідношенням

$$k_1(\cdot) > 4. \tag{8.3}$$

Зіставляючи дані табл. 8.5 з обмеженнями на значення інших компонентів векторного критерію, виділимо альтернативи *D* й *G*, що задовольняють обмеження (8.2) й (8.3). Оскільки $k_2(D)$ = $k_2(G)$ = 4, то обидві альтернативи є кращими за критерієм k_2.

Використовуючи обмеження (8.2), (8.3), неважко визначити оптимальні альтернативи за компонентами векторного критерію $k_3 - k_6$. У результаті одержимо такі множини оптимальних альтернатив для кожної із шести однокритеріальних задач:

задача 1 (оптимізація за компонентою k_1) $\{D, G\}$;

задача 2 (оптимізація за компонентою k_2) $\{D, G\}$;

задача 3 (оптимізація за компонентою k_3) $\{D\}$;

задача 4 (оптимізація за компонентою k_4) $\{D\}$;

задача 5 (оптимізація за компонентою k_5) $\{G\}$;

задача 6 (оптимізація за компонентою k_6) $\{G\}$.

Таким чином, у результаті розв’язання шести однокритеріальних задач не вдалося знайти розв'язку, оптимального до всіх компонентів векторного критерію. Однак кількість альтернатив, що претендують на оптимальний розв'язок вихідної задачі, зменшилося до двох.

8.1.6. Лексикографічний метод розв’язання багатокритеріальних задач

Метод застосовується в задачах, у яких окремі цілі мають різну вагу і їх вдається розташувати в певному ієрархічному порядку. У таких задачах на першому етапі оптимізації визначають множину розв'язків, яка оптимізує ціль найвищого рангу. Отримана множина *D* розв'язків на другому етапі звужується при оптимізації другої за важливістю мети. Цей процес триває доти, доки не залишиться один єдиний розв'язок. Якщо при оптимізації мети щонайнижчого рангу не вдається знайти єдиний розв'язок, то із множини розв'язків, що залишилися, роблять суб'єктивний вибір, або вводять додатковий критерій. Цей метод застосовується досить широко, але припускає ієрархію цілей.

Приклад 8.4. Розв'яжимо задачу із прикладу 8.2 розглянутим методом у припущенні, що необхідно купити комп'ютер з високою швидкодією (мета найвищого рангу), бажано недорогий (мета другого рангу), але надійний (мета третього рангу) й з великим обсягом оперативної пам'яті (мета четвертого рангу). Не заважало б мати досить великий обсяг вінчестера (мета п'ятого рангу) та добре зовнішнє оформлення (мета нижчого рангу).

Із заданої ієрархії цілей випливає, що для визначення кращого розв'язку необхідно послідовно використати компоненти векторного критерію k_2, k_1, k_6, k_3, k_4 та k_5. Таким чином, для визначення кращої альтернативи необхідно послідовно розв’язати шість однокритеріальних оптимізаційних задач.

При розв’язанні першої із шести оптимізаційних задач шукаються альтернативи, які оптимальні за компонентою k_2 векторного критерію. Застосування критерію k_2 до даних табл. 8.5 дозволяє встановити, що кращими і рівноцінними є три альтернативи: *A*, *D*, *G*, – оскільки $k_2(A) = k_2(D) = k_2(G) = 4$. Отже, при розв’язанні наступної оптимізаційної задачі будуть оцінюватися тільки ці три альтернативи.

Розв'язання другої із шести оптимізаційних задач не зменшує кількість кращих альтернатив, оскільки $k_1(A) = k_1(D) = k_1(G) = 6$, тобто альтернативи *A*, *D*, *G* рівноцінні й за критерієм k_1.

При розв'язанні третьої із шести оптимізаційних задач серед альтернатив *A*, *D*, *G* шукаються альтернативи, які оптимальні за компонентою k_6 векторного критерію. Застосування критерію k_6 до даних табл. 8.5 дозволяє встановити, що кращою й єдиною є альтернатива G, оскільки $k_6(A) = k_6(D) = 3$, а $k_6(G) = 4$. Таким чином, застосування лексикографічного методу розв’язання багатокритеріальної задачі в цьому випадку дозволяє виділити єдиний кращий розв'язок.

Підіб'ємо підсумки розгляду методів розв’язання задач із векторним критерієм.

Для розв’язання задач із векторним критерієм необхідне завдання деякого вирішального правила. Єдиного універсального вирішального правила не існує, однак є множина конкретних вирішальних правил. Вибір того або іншого вирішального правила залежить від змістовної постановки задачі, що розв’язується, та суб'єктивних переваг ОПР. Формалізованих загальновизнаних процедур вибору вирішальних правил у цей час не існує. Розробка таких процедур є складною концептуальною проблемою.

8.2. Контрольні запитання та завдання

8.2.1. Контрольні запитання

1. Системи вирішальних правил.
2. Правило абсолютної переваги та правило більшості.
3. Правило виділення кращих об'єктів за допомогою таблиць балових оцінок.
4. Пояснити принцип зведення векторного критерію до скалярного.
5. Лексикографічний метод розв’язання багатокритеріальних задач.

8.2.2. Завдання

1. Формалізувати ситуацію вибору у вигляді задачі прийняття рішень із векторним критерієм при розмірах матриці не менш ніж 8×6.
2. Розв’язати сформульовану задачу всіма описаними в методичних вказівках методами.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Дмитрієнко В.Д. Вступ до теорії і методів прийняття рішень : навч. посіб. / В.Д. Дмитрієнко, В.О. Кравець, С.Ю. Леонов. – Х. : НТУ «ХПІ», 2010. – 139 с.

2. Мушик Э. Методы принятия технических решений / Э. Мушик, П. Мюллер. – М. : Наука, 1990. – 206 с.

3. Розен В.В. Цель – оптимальность – решение (математические модели принятия оптимальных решений) / В.В. Розен. – М. : Радио и связь, 1982. – 168 с.

4. Эддоус М. Методы принятия решений / М. Эддоус, Р. Стэнсфилд. – М. : Аудит, ЮНИТИ, 1997. – 590 с.

5. Князевская Н.В. Принятие рискованных решений в экономике и бизнесе / Н.В. Князевская, В.С. Князевский. – М. : Контур, 1998. – 160 с.

6. Трахтенгерц Э.А. Компьютерная поддержка принятия решений / Э.А. Трахтенгерц. – М. : СИНТЕГ, 1998. – 376 с.

7. Верлань А.Ф. Эволюционные методы компьютерного моделирования / А.Ф. Верлань, В.Д. Дмитриенко, Н.И. Корсунов, В.А. Шорох. – К. : Наук. думка, 1992. – 256 с.

8. Ивахненко А.Г. Непрерывность и дискретность / А.Г. Ивахненко. – К. : Наук. думка, 1990. – 224 с.

9. Протасов И.Д. Теория игр и исследование операций / И.Д. Протасов. – М. : Гелиос АРВ, 2006. – 368 с.

10. Шикин Е.В. От игр к играм: Математическое введение / Е.В. Шикин. 3-е изд., доп. – М. : КомКника, 2006. – 112 с.

11. Вилкас Э.Й. Оптимальность в играх и решениях / Э.Й. Вилкас. – М. : Наука, 1990. – 242 с.

12. Ларичев О.И. Теория и методы принятия решений / О.И. Ларичев. – М. : Логос, 2000. – 296 с.

13. Березовский Б.А. Бинарные отношения в многокритериальной оптимизации / Б.А. Березовский, В.И. Борзенко, Л.М. Кемпнер. – М. : Наука, 1981. – 150 с.

14. Дмитрієнко В.Д. Засоби та алгоритми прийняття рішень / В.Д. Дмитрієнко, О.Ю. Заковоротний: лабораторний практикум. – Х. : НТМТ, 2012. – 76 с.

Навчальне видання

ДМИТРІЄНКО Валерій Дмитрович

ЗАКОВОРОТНИЙ Олександр Юрійович

НОСКОВ Валентин Іванович

ЗАСОБИ ТА АЛГОРИТМИ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ

Навчально-методичний посібник до практичних занять
для студентів денної та заочної форм навчання за напрямками
«Комп'ютерна інженерія» та «Комп'ютерні науки»

Роботу до видання рекомендував *М.Й. Заполовський*
Редактор *О.В. Козюк*

План 2013 р., п. 144

Підп. до друку 25.10.2013. Формат $60 \times 84\ ^1\!/_{16}$. Папір Copy Paper. Друк – ризографія. Гарнітура Times New Roman. Ум. друк. арк. 3,3. Наклад 300 прим. Ціна договірна.

Видавничий центр «НТМТ».
Свідоцтво про державну реєстрацію ДК № 1748 від 15.04.2004 р.
61072, Харків, пр. Леніна, 58, к. 106

Віддруковано в друкарні ТОВ «Цифра принт»
на цифровому лазерному комплексі Xerox DocuTech 6135.
Свідоцтво про державну реєстрацію А01 № 432705 від 03.08.2009 р.
61024 Україна, м. Харків, вул. Данилевського, 30.