Часть 1

Линейная алгебра. Аналитическая геометрия

Задача 1.

Вычислить определитель.

1. $\begin{vmatrix} -1 & 6 & 5 & 1 \\ -2 & 8 & 6 & 2 \\ 2 & 16 & 7 & 3 \\ -3 & 9 & 3 & 4 \end{vmatrix}.$

2. $\begin{vmatrix} 5 & 62 & -79 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 6 & 183 & 201 & 5 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \end{vmatrix}.$

3. $\begin{vmatrix} -5 & 6 & 10 & 6 \\ -9 & 8 & 8 & 5 \\ -8 & 5 & 9 & 5 \\ -11 & 7 & 7 & 4 \end{vmatrix}.$

4. $\begin{vmatrix} 9 & 7 & 9 & 7 \\ 8 & 6 & 8 & 6 \\ -9 & -7 & 9 & 7 \\ -8 & -6 & 8 & 6 \end{vmatrix}.$

5. $\begin{vmatrix} 6 & 8 & -9 & -12 \\ 4 & 6 & -6 & -9 \\ -3 & -4 & 6 & 8 \\ -2 & -3 & 4 & 6 \end{vmatrix}.$

6. $\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$

7. $\begin{vmatrix} -3 & 9 & 3 & 6 \\ -5 & 8 & 2 & 7 \\ 4 & -5 & -3 & -2 \\ 7 & -8 & -4 & -5 \end{vmatrix}.$

8. $\begin{vmatrix} 2 & -5 & 4 & 3 \\ 3 & -4 & 7 & 5 \\ 4 & -9 & 8 & 5 \\ -3 & 2 & -5 & 3 \end{vmatrix}.$

9. $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 & -4 \\ -3 & 4 & -5 & 3 \\ -5 & 7 & -7 & 5 \\ 8 & -8 & 5 & -6 \end{vmatrix}$.

10. $\begin{vmatrix} 7 & 6 & 3 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & 5 \\ 5 & 6 & 5 & 4 \end{vmatrix}$.

11. $\begin{vmatrix} 3 & -3 & -5 & 8 \\ -3 & 2 & 4 & -6 \\ 2 & -5 & -7 & 5 \\ -4 & 3 & 5 & -6 \end{vmatrix}$.

12. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 9 & -8 & 5 & 10 \\ 5 & -8 & 5 & 8 \\ 6 & -5 & 4 & 7 \end{vmatrix}$.

13. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

14. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ -5 & 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}$.

15. $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 & 2 \\ -5 & 8 & 2 & 7 \\ 3 & -2 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$.

16. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 3 & 4 \end{vmatrix}$.

Задача 2.

Даны матрицы A и B. Найдите матрицу C.

1. $A = \begin{pmatrix} -4 & 5 & 1 \\ 2 & -3 & 8 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -7 & 4 \\ 10 & -5 \\ 3 & 16 \end{pmatrix}$, $C = B - 2A^T$.

2. $A=\begin{pmatrix}4 & 1 & 3\\ 0 & -1 & 2\\ 2 & 1 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & -1 & 3\\ 2 & 1 & 0\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}$, $C=(3A)^T-B.$

3. $A=\begin{pmatrix}5 & -2\\ 4 & 3\\ 0 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-4 & -1 & 5\\ 2 & 3 & -1\end{pmatrix}$, $C=A+B^T.$

4. $A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 5\\ -1 & 2 & -4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & -2 & -1\\ 4 & 3 & 2\end{pmatrix}$, $C=2A+3B.$

5. $A=\begin{pmatrix}3 & 0\\ -2 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4 & 1\\ -3 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}$, $C=A^T-B^T.$

6. $A=\begin{pmatrix}2 & -4\\ 3 & 7\\ 6 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4 & 0 & 1\\ 6 & 1 & -3\end{pmatrix}$, $C=2A-B^T.$

7. $A=\begin{pmatrix}3 & 1 & 0\\ -2 & -1 & 4\\ 7 & 2 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & -1 & 3\\ 2 & -1 & 4\\ 4 & 6 & 2\end{pmatrix}$, $C=(2B)^T+A.$

8. $A=\begin{pmatrix}3 & -4 & 2\\ 7 & 5 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-2 & 2\\ 6 & 6\\ -3 & 1\end{pmatrix}$, $C=A-B^T.$

9. $A=\begin{pmatrix} 7 & -4 \\ 0 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$, $C=3B-2A$.

10. $A=\begin{pmatrix} 6 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 7 & 3 & 1 \\ -5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $C=A^T+B^T$.

11. $A=\begin{pmatrix} -2 & 1 & -5 \\ 4 & 3 & -2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 0 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$, $C=2B-A^T$.

12. $A=\begin{pmatrix} -4 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $C=(2A)^T-B$.

13. $A=\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -7 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $C=3A+B^T$.

14. $A=\begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & -5 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 7 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $C=2A-3B$.

15. $A=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 5 & -7 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 7 & 1 \\ -2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$, $C=2A^T-B^T$.

16. $A=\begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 9 & 7 & -3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 6 & 1 & -2 \\ 4 & 3 & 2 \\ -8 & -3 & 2 \end{pmatrix}$, $C = AE + B^T$.

Задача 3.

Какое из произведений существует AB или BA? Почему? Найдите это произведение.

1. $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \\ 5 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$.

2. $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 5 & 7 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$.

3. $A=\begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \\ -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

4. $A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

5. $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\ 5 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

6. A$=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & -1\\ -1 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-2 & 3 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 2 & -1\end{pmatrix}$.

7. $A=\begin{pmatrix}5 & -1 & 3 & 1\\ 2 & 0 & -1 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1 & 3 & 0\\ -2 & 1 & 1\\ 3 & 0 & -2\\ 4 & 1 & 2\end{pmatrix}$.

8. $A=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\end{pmatrix}$.

9. $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 1 & -2 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 5 & 3\\ 6 & 8 & 2\\ 1 & 2 & -1\\ 3 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

10. $A=\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\ 5 & 1 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

11. $A=\begin{pmatrix}3 & 2 & 1 & 2\\ 4 & 1 & 1 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 2 & 1\\ 1 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}$.

12. $A=\begin{pmatrix}3 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

13. $A=\begin{pmatrix}5 & 1 & 0 & -3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & -4\\ 3 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}$.

14. $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 3 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$.

15. $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ -2 & 3 & 1\\ 4 & 2 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 2 & 3 & -2 & -3\\ -2 & -1 & 5 & -2\end{pmatrix}$.

16. $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1 & -2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -3 & 5\\ 3 & -5\\ -1 & 1\end{pmatrix}$.

Задача 4.

Решите систему уравнений тремя способами:

1) по формулам Крамера;
2) с помощью обратной матрицы (матричным методом);
3) методом Гаусса.

Выполните проверку.

1. $\begin{cases} 2x - y - z = 4; \\ 3x + 4y - 2z = 11; \\ 3x - 2y + 4z = 11. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x + y + 2z = -1; \\ 2x - y + 2z = -4; \\ 4x + y + 4z = -2. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 3x + 2y + z = 5; \\ 2x + 3y + z = 1; \\ 2x + y + 3z = 11. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x + 2y + 4z = 31; \\ 5x + y + 2z = 29; \\ 3x - y + z = 10. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x + 5y - 4z + 5 = 0; \\ 2x - 3y + z - 2 = 0; \\ 4x + y - 3z + 4 = 0. \end{cases}$

6. $\begin{cases} x - 2y + 4z = 3; \\ 2x - 4y + 3z = 1; \\ 3x - y + 5z = 2. \end{cases}$

7. $\begin{cases} 2x - y + z = 2; \\ 3x + 2y + 2z = -2; \\ x - 2y + z = 1. \end{cases}$

8. $\begin{cases} x + 3y + 4z = 6; \\ 2x - y - z = 1; \\ x + 2y + 3z = 5. \end{cases}$

9. $\begin{cases} x + y + z - 3 = 0; \\ 2x + 3y - z = 0; \\ x - y + 3z - 7 = 0. \end{cases}$

10. $\begin{cases} 2x - 4y + 9z = 28; \\ 7x + 3y - 6z = -1; \\ 7x + 9y - 9z = 5. \end{cases}$

11. $\begin{cases} x + y + z - 3 = 0; \\ 2x + y - 2z - 1 = 0; \\ x + y - 3z + 1 = 0. \end{cases}$

12. $\begin{cases} 2x + 2y + 2z = 6; \\ x + 2y + 3z = 1; \\ x + 3y + 6z = 2. \end{cases}$

13. $\begin{cases} 2x - 4y + z = 3; \\ x - 5y + 3z = -1; \\ x - y + z = 1. \end{cases}$

14. $\begin{cases} x - y + z = 6; \\ 2x + y + z = 3; \\ x + y + 2z = 5. \end{cases}$

15. $\begin{cases} 2x + y + z = 6; \\ x - y + z = 5; \\ x + y + 2z = 4. \end{cases}$

16. $\begin{cases} x + y + z - 1 = 0; \\ x + 2y + 3z - 2 = 0; \\ x + 3y + 6z - 1 = 0. \end{cases}$

Задача 5.

Найдите общее решение, построив фундаментальную систему для однородной системы алгебраических уравнений.

1. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 0; \\ 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 0; \\ 6x_1 - 12x_2 + 17x_3 - 9x_4 = 0; \\ 7x_1 - 14x_2 + 18x_3 + 17x_4 = 0. \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 - 5x_4 = 0; \\ 4x_1 + 6x_2 + 2x_3 - x_4 = 0; \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 - 14x_4 = 0; \\ 10x_1 + 15x_2 + 3x_3 - 7x_4 = 0. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 14x_1 + 35x_2 - 7x_3 - 63x_4 = 0; \\ -10x_1 - 25x_2 + 5x_3 + 45x_4 = 0; \\ 26x_1 + 65x_2 - 13x_3 - 117x_4 = 0. \end{cases}$

4. $\begin{cases} 9x_1 + 21x_2 - 15x_3 + 5x_4 = 0; \\ 12x_1 + 28x_2 - 20x_3 + 7x_4 = 0. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 3x_5 = 0; \\ 2x_1 + 9x_2 + 5x_3 + 2x_4 + x_5 = 0; \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 - 9x_5 = 0. \end{cases}$

6. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0; \\ 5x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 0; \\ 4x_1 + 5x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0; \\ 5x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 4x_4 = 0. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0; \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0; \\ 3x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 0; \\ x_1 + 17x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases}$

8. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 0; \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 0; \\ x_1 + 7x_2 - 5x_3 - 5x_4 + 5x_5 = 0; \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$

9. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_4 - x_5 = 0; \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0; \\ 4x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 3x_4 - 4x_5 = 0; \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 4x_4 - 7x_5 = 0. \end{cases}$

10. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0; \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0; \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0; \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0. \end{cases}$

11. $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0; \\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0; \\ 4x_1 - 8x_2 + 17x_3 + 11x_4 = 0. \end{cases}$

12. $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 0; \\ 4x_1 + 7x_2 + 5x_3 = 0; \\ x_1 + x_2 - 4x_3 = 0; \\ 2x_1 + 9x_2 + 6x_3 = 0. \end{cases}$

13. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 0; \\ 4x_1 - 2x_2 + 7x_3 + 5x_4 = 0; \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 5x_4 = 0. \end{cases}$

14. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + 5x_5 = 0; \\ 6x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 7x_5 = 0; \\ 9x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 = 0. \end{cases}$

15. $\begin{cases} 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 + 7x_4 + 4x_5 = 0; \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 + 2x_5 = 0; \\ 5x_1 + 9x_2 - 3x_3 + x_4 + 6x_5 = 0. \end{cases}$

16. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0; \\ 5x_1 + 7x_2 + x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0; \\ 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 + 5x_5 = 0. \end{cases}$

Задача 6.

Исследовать на совместность и в случае совместности найдите общее решение методом Жордана – Гаусса и одно частное решение системы. Выполните проверку.

1. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = -9; \\ -x_1 + 2x_3 + x_4 = 12; \\ x_1 - x_2 - x_4 = -6; \\ 5x_1 - x_2 - x_3 + 6x_4 = 7. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 2; \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 6; \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 4; \\ x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = -1. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -5; \\ -x_1 + 2x_2 + x_4 = 6; \\ 2x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 1; \\ 2x_2 + x_3 + x_4 = 5. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_3 - x_4 = -7; \\ x_1 + 3x_2 + 7x_3 + x_4 = -10; \\ 3x_1 - x_2 - 5x_3 = 25; \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$

5. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 1; \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 + x_5 = 9; \\ 2x_1 - x_3 + x_4 - x_5 = 5; \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 - 7x_5 = 7. \end{cases}$

6. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 0; \\ x_1 - x_3 + x_4 - x_5 = 2; \\ x_1 - 4x_2 + x_3 + 5x_4 - 7x_5 = 6; \\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_5 = 2. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 2; \\ 3x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0; \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 3; \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = -1. \end{cases}$

8. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 2; \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 - x_5 = 7; \\ 3x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 10; \\ 6x_1 + 6x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 19. \end{cases}$

9. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 12x_4 - 3x_5 + x_6 = 1; \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 - 2x_6 = 0; \\ 2x_1 + 8x_2 - 11x_3 + 13x_4 - 18x_5 + 11x_6 = 5. \end{cases}$

10. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 5; \\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 8; \\ 3x_1 + 5x_2 - 7x_3 = 13. \end{cases}$

11. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 10; \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 14; \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 18; \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 7x_4 = 22. \end{cases}$

12. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 3; \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 + 5x_4 = 5; \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = -1. \end{cases}$

13. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 0; \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = -6; \\ 3x_1 - 5x_2 + x_3 - 6x_4 = -6; \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 - 4x_4 = 0. \end{cases}$

14. $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = -1; \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2; \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 6; \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 7. \end{cases}$

15. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 0; \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 6; \\ x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$

16. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 5x_3 = -9; \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 9; \\ -x_1 + x_2 - 8x_3 = 3; \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 3. \end{cases}$

Задача 7.

Найдите координаты, модуль и направляющие косинусы вектора $\overrightarrow{AB}$, его орт.

1. $A(1;1;3)$, $B(2;2;3)$.

2. $A(0;1;3)$, $B(1;2;3)$

3. $A(0;1;-1)$, $B(1;2;0)$.

4. $A(2;2;3)$, $B(3;2;4)$.

5. $(2;1;2)$, $B(3;2;2)$.

6. $A(0;1;1)$, $B(1;2;2)$.

7. $A(0;1;4)$, $B(1;2;4)$.

8. $A(1;1;1)$,$B(1;2;2)$.

9. $A(0;-4;3)$, $B(1;-3;4)$.

10. $A(1;2;1)$, $B(0;1;2)$.

11. $A(2;1;3)$, $B(3;2;4)$.

12. $A(0;1;1)$, $B(1;2;2)$.

13. $A(2;1;30$, $B(3;2;4)$.

14. $A(2;0;7)$, $B(0;2;4)$.

15. $A(8;2;-5)$, $B(7;1;4)$.

16. $A(-2;1;3)$, $B(5;1;2)$.

Задача 8.

Вычислите скалярное и векторное произведения векторов $\vec{c}_1 = 2\vec{a} - \vec{b}$, $\vec{c}_2 = -\vec{a} + 3\vec{b}$. Являются ли векторы $\vec{c}_1$ и $\vec{c}_2$ коллинеарными? Являются ли векторы $\vec{c}_1$ и $\vec{c}_2$ ортогональными?

1. $\vec{a}\{-2;1;1\}, \vec{b}\{3;-2;4\}$.

2. $\vec{a}\{0;1;1\}, \vec{b}\{-1;-3;0\}$

3. $\vec{a}\{0;2;1\}, \vec{b}\{2;1;-3\}$

4. $\vec{a}\{1;3;1\}, \vec{b}\{3;1;-2\}$

5. $\vec{a}\{2;-4;1\}, \vec{b}\{3;1;-2\}$

6. $\vec{a}\{2;2;1\}, \vec{b}\{-2;-3;0\}$

7. $\vec{a}\{1;2;3\}, \vec{b}\{0;0;-1\}$.

8. $\vec{a}\{5;2;-2\}, \vec{b}\{3;3;4\}$.

9. $\vec{a}\{1;0;-1\}, \vec{b}\{-1;-3;0\}$

10. $\vec{a}\{1;0;-1\}, \vec{b}\{-1;-3;0\}$

11. $\vec{a}\{-2;1;-1\}, \vec{b}\{-1;3;0\}$.

12. $\vec{a}\left\{\frac{1}{2};1;-2\right\}, \vec{b}\left\{1;-\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right\}$.

13. $\vec{a}\{-1;-1;-1\}, \vec{b}\{0;0;-1\}$.

14. $\vec{a}\{2;-1;4\}, \vec{b}\{-1;0;0\}$.

15. $\vec{a}\{1;0;-1\}, \vec{b}\{0;3;-1\}$.

16. $\vec{a}\{2;1;-1\}, \vec{b}\{0;1;1\}$.

Задача 9.

Заданы вершины треугольника ABC. Вычислите его площадь и косинус внутреннего угла $\angle B$.

1. $A(2;1;5), B(1;3;2), C(4;5;3)$

2. $A(1;-1;4), B(3;1;2), C(3;2;1)$.

3. $A(2;1;7), B(-3;0;3), C(2;4;2)$.

4. $A(-6;2;2), B(1;3;-1), C(0;-4;2)$.

5. $A(-3;1;-2), B(2;3;2), C(4;-1;7)$.

6. $A(2;-5;2), B(1;-3;2), C(2;-3;0)$.

7. $A(-1;2;0), B(1;4;5), C(-4;6;3)$.

8. $A(2;6;-4), B(1;3;-3), C(4;4;-4)$.

9. $A(2;1;0), B(1;1;-3), C(4;1;-2)$.

10. $A(-1;2;7), B(3;1;4), C(4;5;1)$.

11. $A(2;2;1), B(1;1;-2), C(4;0;-1)$.

12. $A(2;-2;2), B(3;5;-7), C(4;8;0)$.

13. $A(5;0;4), B(4;-1;1), C(7;0;2)$.

14. $A(3;4;-2), B(2;1;5), C(5;2;-2)$.

15. $A(3;-2;2), B(0;-1;3), C(1;2;2)$.

16. $A(2;3;4), B(-4;3;0), C(-4;6;2)$.

Задача 10.

Выясните, образуют ли векторы $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ базис. Если образуют, то разложите вектор $\vec{x}$ по этому базису.

1. $\vec{p} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{q} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}.$

2. $\vec{p} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{q} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{r} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$

3. $\vec{p} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{q} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{x} = \begin{pmatrix} 13 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}.$

4. $\vec{p} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{q} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \vec{r} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{x} = \begin{pmatrix} -9 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}.$

5. $\vec{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{q} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}.$

6. $\vec{p} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{q} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}.$

7. $\vec{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{q} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{x} = \begin{pmatrix} -9 \\ -8 \\ -3 \end{pmatrix}.$

8. $\vec{p}=\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}, \vec{q}=\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}, \vec{r}=\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}, \vec{x}=\begin{pmatrix}3\\3\\-1\end{pmatrix}$.

9. $\vec{p}=\begin{pmatrix}1\\0\\5\end{pmatrix}, \vec{q}=\begin{pmatrix}-1\\3\\2\end{pmatrix}, \vec{r}=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}, \vec{x}=\begin{pmatrix}5\\15\\0\end{pmatrix}$.

10. $\vec{p}=\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}, \vec{q}=\begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix}, \vec{r}=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}, \vec{x}=\begin{pmatrix}-1\\7\\-4\end{pmatrix}$.

11. $\vec{p}=\begin{pmatrix}0\\5\\1\end{pmatrix}, \vec{q}=\begin{pmatrix}3\\2\\-1\end{pmatrix}, \vec{r}=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \vec{x}=\begin{pmatrix}-15\\5\\6\end{pmatrix}$.

12. $\vec{p}=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}, \vec{q}=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \vec{r}=\begin{pmatrix}-3\\2\\5\end{pmatrix}, \vec{x}=\begin{pmatrix}23\\-14\\30\end{pmatrix}$.

13. $\vec{p}=\begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix}, \vec{q}=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}, \vec{r}=\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}, \vec{x}=\begin{pmatrix}-1\\7\\0\end{pmatrix}$.

14. $\vec{p}=\begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix}, \vec{q}=\begin{pmatrix}-3\\0\\2\end{pmatrix}, \vec{r}=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}, \vec{x}=\begin{pmatrix}-13\\2\\18\end{pmatrix}$.

15. $\vec{p}=\begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix}, \vec{q}=\begin{pmatrix}3\\1\\-1\end{pmatrix}, \vec{r}=\begin{pmatrix}4\\0\\1\end{pmatrix}, \vec{x}=\begin{pmatrix}0\\-8\\9\end{pmatrix}$.

16. $\vec{p}=\begin{pmatrix}3\\2\\0\end{pmatrix}, \vec{q}=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}, \vec{r}=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}, \vec{x}=\begin{pmatrix}11\\-1\\4\end{pmatrix}$.

Задача 11.

Вычислите площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

1. $\vec{a}=3\vec{p}+2\vec{q}, \vec{b}=2\vec{p}-\vec{q}; |\vec{p}|=4, |\vec{q}|=3, \left(\vec{p},\vec{q}\right)=\frac{3\pi}{4}.$
2. $\vec{a}=2\vec{p}-3\vec{q}, \vec{b}=5\vec{p}+\vec{q}; |\vec{p}|=2, |\vec{q}|=3, \left(\vec{p},\vec{q}\right)=\frac{\pi}{2}.$
3. $\vec{a}=2\vec{p}+3\vec{q}, \vec{b}=\vec{p}-2\vec{q}; |\vec{p}|=2, |\vec{q}|=1, \left(\vec{p},\vec{q}\right)=\frac{\pi}{3}.$
4. $\vec{a}=6\vec{p}-\vec{q}, \vec{b}=\vec{p}+5\vec{q}; |\vec{p}|=\frac{1}{2}, |\vec{q}|=4, \left(\vec{p},\vec{q}\right)=\frac{5\pi}{6}.$
5. $\vec{a}=3\vec{p}-4\vec{q}, \vec{b}=\vec{p}+3\vec{q}; |\vec{p}|=2, |\vec{q}|=3, \left(\vec{p},\vec{q}\right)=\frac{\pi}{4}.$
6. $\vec{a}=5\vec{p}-\vec{q}, \vec{b}=\vec{p}+\vec{q}; |\vec{p}|=5, |\vec{q}|=3, \left(\vec{p},\vec{q}\right)=\frac{5\pi}{6}.$
7. $\vec{a}=3\vec{p}+\vec{q}, \vec{b}=\vec{p}-3\vec{q}; |\vec{p}|=7, |\vec{q}|=2, \left(\vec{p},\vec{q}\right)=\frac{\pi}{4}.$
8. $\vec{a}=\vec{p}+3\vec{q}, \vec{b}=3\vec{p}-\vec{q}; |\vec{p}|=3, |\vec{q}|=5, \left(\vec{p},\vec{q}\right)=\frac{2\pi}{3}.$
9. $\vec{a}=7\vec{p}+\vec{q}, \vec{b}=\vec{p}-3\vec{q}; |\vec{p}|=3, |\vec{q}|=1, \left(\vec{p},\vec{q}\right)=\frac{3\pi}{4}.$
10. $\vec{a}=3\vec{p}+4\vec{q}, \vec{b}=\vec{q}-\vec{p}; |\vec{p}|=2{,}5, |\vec{q}|=2, \left(\vec{p},\vec{q}\right)=\frac{\pi}{2}.$
11. $\vec{a}=6\vec{p}-\vec{q}, \vec{b}=\vec{p}+2\vec{q}; |\vec{p}|=8, |\vec{q}|=\frac{1}{2}, \left(\vec{p},\vec{q}\right)=\frac{\pi}{3}.$
12. $\vec{a}=10\vec{p}+\vec{q}, \vec{b}=3\vec{p}-2\vec{q}; |\vec{p}|=4, |\vec{q}|=1, \left(\vec{p},\vec{q}\right)=\frac{\pi}{6}.$
13. $\vec{a}=6\vec{p}-\vec{q}, \vec{b}=\vec{p}+\vec{q}; |\vec{p}|=3, |\vec{q}|=4, \left(\vec{p},\vec{q}\right)=\frac{\pi}{4}.$
14. $\vec{a}=7\vec{p}-2\vec{q}, \vec{b}=\vec{p}+3\vec{q}; |\vec{p}|=\frac{1}{2}, |\vec{q}|=2, \left(\vec{p},\vec{q}\right)=\frac{\pi}{2}.$
15. $\vec{a}=5\vec{p}+\vec{q}, \vec{b}=\vec{p}-3\vec{q}; |\vec{p}|=1, |\vec{q}|=2, \left(\vec{p},\vec{q}\right)=\frac{\pi}{3}.$
16. $\vec{a}=2\vec{p}-3\vec{q}, \vec{b}=3\vec{p}+\vec{q}; |\vec{p}|=4, |\vec{q}|=1, \left(\vec{p},\vec{q}\right)=\frac{\pi}{6}.$

Задача 12.

1. Вычислите проекцию вектора $\vec{a}=\{-3;1;3\}$ на направление вектора $\overrightarrow{AB}$, где $A(7;3;-2)$, $B(8;2;-2)$.
2. Найдите единичный вектор, перпендикулярный векторам $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}$ и $\vec{b}=2\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$.
3. При каком значении t векторы $\vec{a}=\{6;0;12\}$ и $\vec{b}=\{-8;13;t\}$ будут взаимно перпендикулярны?
4. Докажите, что точки $A(1;-1;1)$, $B(1;3;1)$, $C(4;3;1)$, $D(4;-1;1)$ являются вершинами прямоугольника. Вычислите длину его диагоналей.
5. В прямоугольном треугольнике ABC углы при вершинах A и C равны 60° и 90° соответственно, а длина гипотенузы равна 2. Вычислите скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}$.
6. Даны точки $A(0;3;4)$, $B(2;5;-1)$, $C(-4;2;-2)$. Вычислите скалярное произведение векторов $3\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}$.
7. В треугольнике ABC заданы координаты вершин $A(-1;-2;4)$, $B(-4;-2;0)$, $C(3;-2;1)$. Определите его внешний угол при вершине B.
8. Найдите координаты вектора $\vec{p}$, коллинеарного вектору $\vec{q}=\{3;-4;0\}$, если известно, что вектор $\vec{p}$ образует осью Ox тупой угол и $|\vec{p}|=10$.
9. Даны $A(1;1;-1)$, $B(2;4;-1)$ и $C(8;3;-1)$ – координаты вершин треугольника ABC. Выясните, каким он является: прямоугольным, остроугольным или тупоугольным.
10. Проверьте, будет ли треугольник ABC с вершинами в точках $A(1;2;3)$, $B(7;10;3)$, $C(-1;3;1)$ прямоугольным.
11. Найдите работу силы $\vec{f}=\{4;-1;1\}$ на перемещении $\vec{s}=\{5;3;-2\}$.
12. Вычислите координаты вектора $\vec{c}$, ортогонального векторам $\vec{a}=2\vec{j}-\vec{k}$ и $\vec{b}=-\vec{i}+2\vec{j}-3\vec{k}$ и образующего тупой угол с осью Oy, если $|\vec{n}|=\sqrt{7}$.
13. Найдите скалярное произведение векторов $\vec{p}=2\vec{a}-\vec{b}$ и $\vec{q}=2\vec{b}+\vec{a}$, если $\vec{a}=-\vec{i}+3\vec{j}-7\vec{k}$ и $\vec{b}=2\vec{i}-\vec{j}+5\vec{k}$.
14. Найдите угол между векторами $\vec{a}+\vec{b}$ и $\vec{a}-\vec{b}$, если $\vec{a}=3\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$ и $\vec{b}=\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$.
15. Даны векторы $\vec{a}=m\vec{i}+3\vec{j}+4\vec{k}$ и $\vec{b}=4\vec{i}+m\vec{j}-7\vec{k}$. При каком значении m векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны?
16. Найдите скалярное произведение векторов $\vec{p}=\vec{a}-2\vec{b}$ и $\vec{q}=2\vec{a}+\vec{b}$, если $\vec{a}=2\vec{i}-5\vec{j}-7\vec{k}$, $\vec{b}=5\vec{i}+2\vec{j}-5\vec{k}$.

Задача 13.

1. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол 30^o, $|\vec{a}|=6, |\vec{b}|=1$. Найдите длину вектора $\vec{p}$, равного векторному произведению векторов $(7\vec{a}-2\vec{b})$ и $(2\vec{a}+3\vec{b})$.
2. Сила $\vec{f}=\{2;-4;5\}$ приложена к точке $A(4;-2;3)$. Определите момент этой силы относительно точки $B(3;2;-1)$.
3. Вычислите площадь треугольника, построенного на векторах $3\vec{a}-\vec{b}$ и $2\vec{b}-\vec{a}$, если $|\vec{a}|=3, |\vec{b}|=4,$ а угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен 150°.
4. найдите вектор $\vec{c}$, зная, что он перпендикулярен векторам $\vec{a}=\{0;-1;2\}$ и $\vec{b}=\{1;3;3\}$ и его скалярное произведение на вектор $\vec{p}=3\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$ равно 8.
5. Найдите длину высоты треугольника ABC, опущенной из вершины C на сторону AB, если $A(2;3;4), B(4;3;2) C(1;1;1)$.
6. Даны векторы $\vec{a}=\{3;1;-1\}, \vec{b}=\{-2;1;4\}$. Вычислите векторное произведение векторов $\vec{b}$ и $\vec{a}-2\vec{i}$.
7. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\left(\vec{a}+3\vec{b}\right)$ и $\left(3\vec{a}+\vec{b}\right)$, если $|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$, а угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен 30°.
8. Вычислите площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}=\{2;-1;5\}$ и $\vec{b}=\{2;3;6\}$ как на сторонах.
9. Найдите вектор $\vec{c}$, зная, что он перпендикулярен векторам $\vec{a}=(2;3;-1)$ и $\vec{b}=(1;-2;3)$ и скалярное произведение его на вектор $\vec{p}=2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$ равно -6.
10. Найдите площадь параллелограмма, построенного на векторах $\left(\vec{a}-2\vec{b}\right)$ и $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)$, если $|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$, а угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен 30°.
11. Вычислите площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}=\{2;-1;5\}$ и $\vec{b}=\{2;0;2\}$ как на сторонах.
12. Найдите орт $\vec{e}$, перпендикулярный векторам $\vec{a}=\{1;-1;0\}, \vec{b}=\{2;1;-1\}$.
13. Вычислите векторное произведение векторов $\left(4\vec{b}-\vec{a}\right), \left(2\vec{b}+3\vec{a}\right)$, если $\vec{a}=-\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}, \vec{b}=2\vec{i}-7\vec{j}+\vec{k}$.
14. Найдите единичный вектор, перпендикулярный векторам $\vec{a}=\{3;-1;-1\}, \vec{b}=\{0;2;1\}$.

15. Найдите единичный вектор, перпендикулярный векторам $\vec{a}=\{1;-1;-1\}, \vec{b}=2\vec{j}+\vec{k}$.
16. Заданы точки $A(0;2;0), B(3;0;-4), C(3;0;0), D(-1;-1;-1)$. Вычислите векторное произведение векторов $\left(\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{BC}\right)$ и $\left(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AC}\right)$.

Задача 14.

1. Лежат ли точки $A(5;7;-2), B(3;1;-1), C(9;4-4), D(1;5;0)$ в одной плоскости?
2. При каком значении k точки $A(1;0;3), B(-1;3;4), C(1;2;1), D(k;2;5)$ лежат в одной плоскости?
3. Вычислите объем треугольной пирамиды с вершинами в точках $A(0;0;1,), B(2;3;5), C(6;2;3), D(3;7;2)$.
4. Вычислите объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}=\vec{p}-3\vec{q}+\vec{r}$, $\vec{b}=2\vec{p}+\vec{q}-3\vec{r}$, $\vec{c}=\vec{p}+2\vec{q}+\vec{r}$, где $\vec{p},\vec{q},\vec{r}$ – взаимно перпендикулярные орты.
5. Вычислите объем треугольной пирамиды с вершинами в точках $A(0;0;2), B(2;3;5), C(6;2;3), D(3;7;2)$.
6. Найдите объем параллелепипеда с вершинами в точках $A(2;2;2), B(4;3;3), C(4;5;4), D(5;5;6)$.
7. При каком значении m векторы $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}-m\vec{k}, \vec{b}=\vec{j}+\vec{i}+(m+1)\vec{k}, \vec{c}=\vec{i}-\vec{j}+m\vec{k}$ компланарны?
8. Лежат ли точки $A(1;-2;2), B(1;4;0), C(-4;1;1), D(-5;-5;3)$ в одной плоскости?
9. Заданы точки $A(1;2;-2), B(3;2;-1), C(0;1;-2), D(3;2;3)$. Найдите объем тетраэдра $ABCD$.
10. Найдите объем параллелепипеда, построенного на векторах $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$, если $A(5;2;0), B(2;5;0), C(1;2;4), D(-1;1;1)$.
11. Будут ли компланарны векторы $\vec{a}=\{1;-2;-2\}, \vec{b}=\{-2;-1;-2\}, \vec{c}=\{0;-5;-6\}$?
12. Проверьте, лежат ли точки $A(2;3;1), B(4;1;-2), C(6;3;7), D(7;5;-3)$ в одной плоскости.
13. Проверьте, лежат ли в одной плоскости точки с координатами $A(1;1;1), B(2;3;1), C(3;2;1), D(5;9;8)$.
14. Найдите объем тетраэдра, построенного на векторах $\vec{a}=\{1;2;2\}, \vec{b}=\{2;1;2\}, \vec{c}=\{4;8;9\}$.

15. Найдите объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}=\{6;3;4\},\vec{b}=\{-1;-2;-1\},\vec{c}=\{2;1;2\}$.
16. Найдите объем тетраэдра, построенного на векторах $\vec{a}=\{-1;-2;-1\},\vec{b}=\{4;3;6\},\vec{c}=\{2;1;2\}$.

Задача 15.

Заданы прямая l и точка M. Запишите:

a) уравнение прямой, проходящей через точку M параллельно прямой l;
b) уравнение прямой, проходящей через точку M перпендикулярно прямой l.

1. $M(-2;1), l: 3x-2y+12=0.$

2. $M(2;-1), l: x-y+1=0.$

3. $M(3;-3), l: x+2y-4=0.$

4. $M(-1;4), l: 2x-5y+2=0.$

5. $M(-5;0), l: -x+2y-9=0.$

6. $M(4;-1), l: x+4y-3=0.$

7. $M(1;-1), l: 2x+2y+1=0.$

8. $M(2;0), l: -4x+y+2=0.$

9. $M(6;-1), l; 2x-3y+4=0.$

10. $M(1;-3), l: -3x-y+2=0.$

11. $M(1;1), l: x-y+10=0.$

12. $M(3;-2), l: 2x-3y-2=0.$

13. $M(-1;1), l: x+y+2=0.$

14. $M(2;2), l: 3x+y+4=0.$

15. $M(2;1), l: x+4y+1=0.$

16. $M(-2;2), l: 4x+y-3=0.$

Задача 16.

Напишите уравнение прямой, которая проходит через точку M и через точку пересечения прямых l_1, l_2.

1. $M(1;-2);\quad l_1: 2x-y-1=0; l_2: x+3y-4=0$.

2. $M(-4;0);\quad l_1: x+y-2=0; l_2: x-3y+2=0$.

3. $M(1;-1);\quad l_1: 7x-2y-5=0; l_2: x-5y+4=0$.

4. $M(4;3);\quad l_1: 5x-2y-1=0; l_2: 2x-3y+4=0$.

5. $M(3;3);\quad l_1: x-2y-1=0; l_2: x-7y+4=0$.

6. $M(4;4);\quad l_1: 2x+2y-2=0; l_2: x-3y+5=0$.

7. $M(0;-3);\quad l_1: x+4y-3=0; l_2: x+5y+4=0$.

8. $M(2;-2);\quad l_1: 3x+2y-1=0; l_2: x-3y-4=0$.

9. $M(-2;0);\quad l_1: 2x+3y+5=0; l_2: -x+4y+3=0$.

10. $M(1;-2);\quad l_1: 2x+y+6=0; l_2: 3x+5y-15=0$.

11. $M(2;1)$; $l_1: 2x - y + 3 = 0; l_2: 3x + 5y + 11 = 0$.

12. $M(-1;-3)$; $l_1: 3x + 2y - 5 = 0; l_2: x - 2y + 1 = 0$.

13. $M(-1;1)$; $l_1: 3x + 2y - 5 = 0; l_2: x - 2y + 1 = 0$.

14. $M(2;-3)$; $l_1: x + y - 2 = 0; l_2: x - 2y - 1 = 0$.

15. $M(4;0)$; $l_1: x + 2y - 5 = 0; l_2: x - 2y + 2 = 0$.

16. $M(3;-2)$; $l_1: x - 2y + 3 = 0; l_2: 3x - y - 1 = 0$.

Задача 17.

Даны вершины треугольника $\triangle ABC: A(4;3), B(-3;-3), C(2;7)$. Найти:

1) уравнение стороны BC и длину BC;
2) уравнение высоты, опущенной из вершины A на сторону BC;
3) уравнение медианы, проведенной из вершины C.

1. $A(-3;3), B(5;1), C(6;-2)$.

2. $A(2;-1), B(4;5), C(-3;2)$.

3. $A(2;0), B(5;3), C(3;7)$.

4. $A(-3;3), B(5;1), C(6;-2)$.

5. $A(2;1), B(-1;-1), C(3;2)$.

6. $A(0;1), B(-2;2), C(3;-2)$.

7. $A(-2;-1), B(1;1), C(4;0)$.

8. $A(3;-1), B(-3;1), C(1;4)$.

9. $A(4;-2), B(1;6), C(-3;1)$.

10. $A(4;2), B(-1;3), C(1;-2)$.

11. $A(0;4), B(-3;-2), C(0;1)$.

12. $A(2;0), B(-2;1), C(1;-1)$.

13. $A(-1;1), B(1;-2), C(3;1)$.

14. $A(1;1), B(-2;-3), C(2;0)$.

15. $A(2;4), B(1;1), C(4;2)$.

16. $A(3;2), B(-1;3), C(1;-2)$.

Задача 18.

Построить кривую, заданную уравнением, приведя его к каноническому виду. Определить:

1) для окружности – координаты центра и радиус;
2) для эллипса – координаты центра, полуоси, координаты фокусов, эксцентриситет, уравнения директрис;
3) для гиперболы – координаты центра, действительную и мнимую полуоси, координаты фокусов, эксцентриситет, уравнения директрис, уравнения асимптот;
4) для параболы – координаты вершины, параметр параболы, координаты фокуса, уравнение директрисы.

1. $4x^2 + y^2 - 8x + 4y = 0$.

2. $9x^2 - 4y^2 + 54x + 8y + 41 = 0$.

3. $2x^2+3y^2+12x-6y+21=0.$

4. $4x^2-y^2+8x-2y+3=0.$

5. $9x^2+16y^2+36x-64y-44=0.$

6. $4x^2-25y^2+8x-10y+4=0.$

7. $9x^2+4y^2+36x-8y+36=0.$

8. $x^2-4y^2+10x+24y-7=0.$

9. $4x^2+25y^2-8x+100y+4=0.$

10. $x^2-4y^2+6x+8y+5=0.$

11. $2x^2+3y^2+8x-6y+11=0.$

12. $9x^2-4y^2+36x+8y+68=0.$

13. $4x^2+9y^2-32x+36y+64=0.$

14. $4x^2-y^2-8x-4y-16=0.$

15. $9x^2+4y^2+18x-8y+49=0.$

16. $4x^2-y^2+16x-2y+15=0.$

Задача 19.

Составить уравнение плоскости, проходящей через точку P параллельно плоскости α.

1. $P(2;1;1)$, $\alpha:\ 3x+y-2z-1=0$.
2. $P(2;1;3)$, $\alpha:\ x-4y+3z-3=0$.
3. $P(1;3;2)$, $\alpha:\ x+y-z-3=0$.
4. $P(1;0;-1)$, $\alpha:\ 2x+y-5z-1=0$.
5. $P(3;-1;1)$, $\alpha:\ 3x+y-2z+1=0$.
6. $P(0;5;7)$, $\alpha:\ 3x+y-2z-1=0$.
7. $P(2;1;0)$, $\alpha:\ x+y-2z=0$.
8. $P(3;2;1)$, $\alpha:\ x+y-z-1=0$.
9. $P(-3;4;1)$, $\alpha:\ 2x-y-z-1=0$.
10. $P(-1;1;1)$, $\alpha:\ 5y-4z+2=0$.
11. $P(2;1;2)$, $\alpha:\ x+y-2z=0$.
12. $P(3;-4;1)$, $\alpha:\ x+y-z-1=0$.
13. $P(1;1;1)$, $\alpha:\ x+y+2z-3=0$.
14. $P(-6;1;1)$, $\alpha:\ x+3y-6=0$.
15. $P(0;2;1)$, $\alpha:\ x+y-2z-5=0$.
16. $P(5;2;-1)$, $\alpha:\ 3x-y+z-4=0$.

Задача 20.

Составить уравнение плоскости, проходящей через точку A перпендикулярно к вектору $\overrightarrow{BC}$.

1. $A(2;1;5), B(1;3;2), C(4;5;3)$

2. $A(1;-1;4), B(3;1;2), C(3;2;1)$.

3. $A(2;1;7), B(-3;0;3), C(2;4;2)$.

4. $A(-6;2;2), B(1;3;-1), C(0;-4;2)$.

5. $A(-3;1;-2), B(2;3;2), C(4;-1;7)$.

6. $A(2;-5;2), B(1;-3;2), C(2;-3;0)$.

7. $A(-1;2;0), B(1;4;5), C(-4;6;3)$.

8. $A(2;6;-4), B(1;3;-3), C(4;4;-4)$.

9. $A(2;1;0), B(1;1;-3), C(4;1;-2)$.

10. $A(-1;2;7), B(3;1;4), C(4;5;1)$.

11. $A(2;2;1), B(1;1;-2), C(4;0;-1)$.

12. $A(2;-2;2), B(3;5;-7), C(4;8;0)$.

13. $A(5;0;4), B(4;-1;1), C(7;0;2)$.

14. $A(3;4;-2), B(2;1;5), C(5;2;-2)$.

15. $A(3;-2;2), B(0;-1;3), C(1;2;2)$.

16. $A(2;3;4), B(-4;3;0), C(-4;6;2)$.

Задача 21.

Найти расстояние от точки M до плоскости α.

1. $M\left(1;0;-3\right)$, $\alpha:\ 2x-y-z=1$.

2. $M\left(1;2;-1\right)$, $\alpha:\ 2x+3y-6z=2$.

3. $M(1;-3;1)$, $\alpha:\ 2x+y-z=2$.

4. $M(3;-1;0)$, $\alpha:\ x+2y-z=4$.

5. $M(2;1;-4)$, $\alpha:\ 5x+y-7z=2$.

6. $M(0;-2;1)$, $\alpha:\ 2x-y+2z=1$.

7. $M(1;2;-4)$, $\alpha:\ 2x+y+z=5$.

8. $M(4;2;-1)$, $\alpha:\ 2x-y-z=1$.

9. $M(-3;1;-2)$, $\alpha:\ -3x-y+2z=1$.

10. $M(1;-1;2)$, $\alpha:\ 4x+4y-2z=3$.

11. $M(2;-2;1)$, $\alpha:\ x+y-z=3$.

12. $M(1;-1;-1)$, $\alpha:\ 6x+2y-3z=2$.

13. $P(-2;1;3)$, $\alpha:\ 4x+y-z=1$.

14. $M(1;1;1)$, $\alpha:\ 2x+2y+z=4$.

15. $M(2;-1;-1)$, $\alpha:\ 2x+y-z=5$.

16. $M(2;3;-3)$, $\alpha:\ 3x-2y+6z=3$.

Задача 22.

Найти угол между плоскостями α_1, α_2.

1. $\alpha_1:\ -x+2y-z+1=0;\ \alpha_2: y+3z-1=0$.

2. $\alpha_1:\ x+y-2z+4=0;\ \alpha_2: 2x-y+z-3=0$.

3. $\alpha_1:\ -x+2y-z+1=0;\ \alpha_2: 2x-y+3z-1=0$.

4. $\alpha_1:\ 2x+y-2z+3=0;\ \alpha_2: x+y+6=0$.

5. α_1: $-3x+4y-7=0$; $\alpha_2: x+z-5=0$.

6. α_1: $3x-2y-4z+5=0$; $\alpha_2: 2y-z-3=0$.

7. α_1: $x+2y-5z+2=0$; $\alpha_2: 2x+4y+2z-1=0$.

8. α_1: $3x+4y-7=0$; $\alpha_2: 2x+y+2z-1=0$.

9. α_1: $x+2y-z+1=0$; $\alpha_2: -2x-4y+2z-7=0$.

10. α_1: $x+2y+3z+2=0$; $\alpha_2: 2x-y-9=0$.

11. α_1: $2x-y+2z-7=0$; $\alpha_2: 3x+4y-z-1=0$.

12. α_1: $x+2y+3z=0$; $\alpha_2: 2x-4y+2z-5=0$.

13. α_1: $x-2y-z-2=0$; $\alpha_2: 2x-y+2z-4=0$.

14. α_1: $x-2y-2z+3=0$; $\alpha_2: 4x-7z-5=0$.

15. α_1: $x-2y+z-2=0$; $\alpha_2: x-y-z+3=0$.

16. α_1: $x-2y+2z-8=0$; $\alpha_2: x+z-6=0$.

Задача 23.

Записать канонические уравнения прямой, проходящей через точки A и B. Выясните, лежит ли точка P на этой прямой.

1. $A(1;2;2)$, $B(0;4;-4)$, $P(3;1;2)$.

2. $A(-2;3;1)$, $B(1;6;-1)$, $P(2;2;2)$.

3. $A(-2;3;1)$, $B(1;6;-1)$, $P(2;2;2)$.

4. $A(-1;2;7)$, $B(1;3;-7)$, $P(3;4;-7)$.

5. $A(5;-1;2)$, $B(3;2;5)$, $P(7;-4;-1)$.

6. $A(4;1;0)$, $B(1;2;2)$, $P(4;1;4)$.

7. $A(1;-2;1)$, $B(3;1;-1)$, $P(5;4;-3)$.

8. $A(-3;3;4)$, $B(3;1;1)$, $P(2;2;-2)$.

9. $A(3;-1;0)$, $B(1;0;-3)$, $P(5;-2;3)$.

10. $A(5;0;2)$, $B(1;3;-2)$, $P(-3;5;-6)$.

11. $A(2;-5;1)$, $B(4;3;-1)$, $P(0;2;5)$.

12. $A(2;-4;1)$, $B(-1;-3;2)$, $P(-4;-2;3)$.

13. $A(3;-2;-1)$, $B(4;-4;-3)$, $P(5;-6;-5)$.

14. $A(-3;4;-1)$, $B(1;3;-2)$, $P(4;7;2)$.

15. $A(-2;2;-2)$, $B(-1;5;1)$, $P(0;8;4)$.

16. $A(-5;1;-2)$, $B(-4;2;-1)$, $P(3;9;6)$.

Задача 24.

Прямая задана общими уравнениями. Записать ее канонические и параметрические уравнения.

1. $\begin{cases} x-2y+3z-4=0; \\ 3x+2y-5z-4=0. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x+y+z-4=0; \\ 2x-y-3z+1=0. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x-y+z-3=0; \\ x+2y-2z-4=0. \end{cases}$

4. $\begin{cases} 3x-y+z-4=0; \\ -2x+2y-5z=0. \end{cases}$

5. $\begin{cases} 3x-y+4z-6=0; \\ x+y-5z-4=0. \end{cases}$

6. $\begin{cases} -x-2y+2z-2=0; \\ x+5y+3z-1=0. \end{cases}$

7. $\begin{cases} 2x-y+z-2=0; \\ x-2y+3z-2=0. \end{cases}$

8. $\begin{cases} 4x-2y+3z+4=0; \\ x+2y-5z+6=0. \end{cases}$

9. $\begin{cases} x-4y+z+4=0; \\ 2x+3y+4z+7=0. \end{cases}$

10. $\begin{cases} 5x-3y+z-1=0; \\ x+3y-2z-5=0. \end{cases}$

11. $\begin{cases} x-4y+3z-4=0; \\ 2x+4y-5z+1=0. \end{cases}$

12. $\begin{cases} -x-y+3z-5=0; \\ 3x+2y-5z+3=0. \end{cases}$

13. $\begin{cases} 4x+y+z-10=0; \\ x+3y-2z+3=0. \end{cases}$

14. $\begin{cases} x-y+z-1=0; \\ 2x+4y-z+10=0. \end{cases}$

15. $\begin{cases} 6x-3y+z-3=0; \\ x+y-5z-5=0. \end{cases}$

16. $\begin{cases} 2x+y+2z+4=0; \\ -x-3y-z+3=0. \end{cases}$

Задача 25.

Составить канонические уравнения прямой, которая проходит через точку A перпендикулярно плоскости α.

1. $A(1;2;3)$, $\alpha:\ 3x-2y-z-3=0$.

2. $A(2;2;2)$, $\alpha:\ x-y-3z-4=0$.

3. $A(-1;-2;6)$, $\alpha:\ x+y-3z-2=0$.

4. $A(3;0;3)$, $\alpha:\ 2x+3y-4z=0$.

5. $A(-3;5;-4)$, $\alpha:\ 4x-y+5z-1=0$.

6. $A(0;-1;-2)$, $\alpha:\ 2x+y+z-7=0$.

7. $A(-3;4;2)$, $\alpha:\ 4x+2y-z+1=0$.

8. $A(1;2;3)$, $\alpha:\ 3x-2y-z-3=0$.

9. $A(1;2;7)$, $\alpha:\ -x+y-4z+5=0$.

10. $A(1;-2;-3)$, $\alpha:\ -4x-y+5z+3=0$

11. $A(-2;-3;4)$, $\alpha:\ 2x+6y-2z+3=0$

12. $A(4;-2;1)$, $\alpha:\ 6x-3y+2z-2=0$.

13. $A(0;1;1)$, $\alpha:\ x+y-z+4=0$.

14. $A(0;-2;-5)$, $\alpha:\ x+3y-2z-1=0$.

15. $A(1;4;-1)$, $\alpha:\ 7x+y-3z+2=0$.

16. $A(-1;0;-1)$, $\alpha:\ 2x+2y-2z+7=0$

.

Задача 26.

Найти точку пересечения прямой l и плоскости α. Вычислить угол между прямой l и плоскостью α.

1. $l:\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z-4}{3}$, $\alpha: x+3y+5z-42=0$.

2. $l:\dfrac{x-3}{-1}=\dfrac{y-4}{5}=\dfrac{z-4}{2}$, $\alpha: 7x+y+4z-47=0$.

3. $l:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-4}{3}$, $\alpha: x-2y+z-8=0$.

4. $l:\dfrac{x}{-2}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z-2}{2}$, $\alpha: 3x+y-z+13=0$.

5. $l:\dfrac{x+2}{-2}=\dfrac{y-1}{-4}=\dfrac{z+1}{0}$, $\alpha: 2x-2y+3z+21=0$.

6. $l:\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z+2}{-3}$, $\alpha: 3x-y-z-3=0$.

7. $l:\dfrac{x-3}{-2}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z-1}{-4}$, $\alpha: x+y+z-10=0$.

8. $l:\dfrac{x+1}{-4}=\dfrac{y-1}{4}=\dfrac{z+2}{5}$, $\alpha: 2x+3y-2z-11=0$.

9. $l:\dfrac{x+3}{3}=\dfrac{y+2}{-2}=\dfrac{z-6}{-3}$, $\alpha: 7x+2y+2z+2=0$.

10. $l:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z-1}{4}$, $\alpha: 5x+3y+4z+23=0$.

11. $l:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{0}=\dfrac{z+3}{2}$, $\alpha: 2x-y+4z=0$.

12. $l:\dfrac{x}{0}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z+4}{-3}$, $\alpha: 17x-4y-z+6=0$.

13. $l: \dfrac{x-7}{5} = \dfrac{y+2}{-2} = \dfrac{z+4}{3}, \ \alpha: 3x - 9y + z + 1 = 0.$

14. $l: \dfrac{x-4}{4} = \dfrac{y+4}{-3} = \dfrac{z-5}{4}, \ \alpha: 2x + 2y - z + 7 = 0.$

15. $l: \dfrac{x-5}{0} = \dfrac{y+2}{-3} = \dfrac{z}{3}, \ \alpha: 2x + y + 3z - 20 = 0.$

16. $l: \dfrac{x-3}{4} = \dfrac{y-3}{-2} = \dfrac{z+1}{-3}, \ \alpha: x + y + z - 7 = 0.$

Часть 2

Пределы и непрерывность функции одной переменной.

Дифференциальное исчисление функции одной переменной

Задача 1.

Вычислить пределы, не пользуясь правилом Лопиталя.

1. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3 - x + 4}{2x^3 - 4x^2 + 3}$; б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3x^2 - 7x - 6}{2x^2 + x - 21}$; в) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{3x+1} - \sqrt{2x+2}}{\sqrt{8x+1} - 3}$;

   с) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7^{2x} - 5^{2x}}{2x - arctg\,3x}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+1}\right)^{\frac{x}{2}}$; е) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1 - \ln\left(1 + x^3\right)\right)^{3/(\sin x)^3}$.

2. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2 - 4x + 3}{4x^3 + 7x - 5}$; б) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2 + 4x + 4}{x^3 + 8}$; в) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{1+2x} - 3}{\sqrt{x} - 2}$;

   с) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1 - \cos 10x}{e^{x^2} - 1}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)^{2x}$; е) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1 + \ln(1-x)\right)^{5/tgx}$.

3. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3 + 4x^4 + x}{(7x+5)^2}$; б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^2 - 5x - 3}{x^2 - 2x - 3}$ в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+1} - 1}{\sqrt{x^2+16} - 4}$

   с) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-3x)}{tg\,2x}$ д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-1}{3x}\right)^{x+2}$ е) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos\sqrt{x}\right)^{3/x}$

4. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-2x+5}{2x^2+4x-3}$ б) $\lim\limits_{x\to6}\dfrac{x^2-5x-6}{x^2-7x+6}$ в) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x+3}-2}$

с) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3^{2x}-5^{x}}{\ln(1+2x)}$ д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+1}{3x-1}\right)^{x+2}$ е) $\lim\limits_{x\to0}\left(2-e^{arctg^2\sqrt{x}}\right)^{2/\sin x}$

5. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^4+3x-2}{5x^2+3x^3-1}$ б) $\lim\limits_{x\to-4}\dfrac{x^2+8x+16}{(x^2+3x-4)(x+4)}$; в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{x+4}-2}$

с) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{\ln(1+2\sin^2 x)}$ д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+8}{x+4}\right)^{4x}$ е) $\lim\limits_{x\to0}\left(2-e^{3x}\right)^{2/\arcsin\, x}$

6. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+2x^2+3x^3}{x^2-x^3+3x^4}$ б) $\lim\limits_{x\to8}\dfrac{2x^2-17x+8}{x^2-9x+8}$ в) $\lim\limits_{x\to64}\dfrac{\sqrt{x}-8}{\sqrt{x-15}-7}$

с) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{2x}-e^{3x}}{\ln(1-5x)}$ д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x-1}{5x+2}\right)^{3x-1}$ е) $\lim\limits_{x\to0}\left(\cos x\right)^{1/(\sin 3x)^2}$

7. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-5x+14}{7x^3+2x^2-3}$ б) $\lim\limits_{x\to7}\dfrac{2x^2-5x-63}{x^2-6x-7}$ в) $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$

с) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{-3x}-1}{1-\sqrt[4]{1+4x}}$ д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x}{2x-3}\right)^{x-1}$; е) $\lim\limits_{x\to0}(1-\ln(1+\sqrt[3]{x}))^{4/(\sin\sqrt[3]{x})}$

8. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^4+18x^2-3}{3x^3+5x+10}$ б) $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{3x^2-7x-40}{x^2-10x+25}$ в) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{3}}{x-2}$

с) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{4x}-e^{-2x}}{\ln(1+2x)-\sin x}$ д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+5}{x^2-5}\right)^{2x^2}$ е) $\lim\limits_{x\to0}\left(2-e^{\left(\arcsin\sqrt{x}\right)^2}\right)^{3/x}$

9. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+x}{10x^3+5x^2-1}$ б) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{2x^2+3x-2}{x^2+3x+2}$ в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{2+x}-\sqrt{2}}$

с) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2^{x}-e^{-3x}}{\ln(1+2x)}$ д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+6}\right)^{2x}$ е) $\lim\limits_{x\to0}(\cos\pi x)^{1/(x\cdot\sin\pi x)}$

10.а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{12x^4+6x-1}{5x^4-4x^3+3}$ б) $\lim\limits_{x\to5}\frac{x^2-6x+5}{x^2-2x-15}$ в) $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt{7+x}-\sqrt{9-x}}{x-1}$

с) $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{7x}-e^{-2x}}{\sin x-2x}$ д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{4x+1}{4x}\right)^{2x}$ е) $\lim\limits_{x\to0}(1+tg^2 3x)^{1/\ln(\cos x)}$

11.а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{7x^3+8x^2+1}{12x^3-9x+5x^6}$ б) $\lim\limits_{x\to1/3}\frac{9x^2-6x+1}{3x^2+2x-1}$; в) $\lim\limits_{x\to a}\frac{\sqrt{3x+a}-\sqrt{x+3a}}{x-a}$

с) $\lim\limits_{x\to0}\frac{3^{5x}-2^{7x}}{\arcsin 2x-x}$ д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x+1}{3x-2}\right)^{4x+1}$ е) $\lim\limits_{x\to0}(2-e^{3x})^{5/arctg\,x}$

12.а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^3+2x^2+x}{8x^4+5x+4}$ б) $\lim\limits_{x\to4}\left(\frac{x^2+x-20}{x^2-3x-4}\right)$ в) $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$

с) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos 3x-\cos 5x}{\sqrt[5]{1+5x^2}-1}$ д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5x-1}{5x+3}\right)^{4x+1}$ е) $\lim\limits_{x\to0}(1-\sin^2 x)^{2/tgx^2}$

13.а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^3+5x^2+11}{13x^3-5x+7x^2}$ б) $\lim\limits_{x\to1}\frac{2x^2-x-1}{4x^2-7x+3}$ в) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3}}{x}$

с) $\lim\limits_{x\to0}\frac{9\ln(1-2x)}{4arctg\,3x}$ д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2x+6}$ е) $\lim\limits_{x\to0}\left(2-5^{\arcsin x^3}\right)^{5/x^3}$

14.а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{8x^3+5x^4-4}{7x^3+4x}$ б) $\lim\limits_{x\to1/2}\frac{4x^2-1}{4x^2-4x+1}$ в) $\lim\limits_{x\to-8}\frac{\sqrt{1-x}-3}{\sqrt{12+x}-2}$

с) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin^2 2x}{\sqrt[3]{1+3x^2}-1}$ д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2-1}{2x^2+3}\right)^{x^2/3}$ е) $\lim\limits_{x\to0}\left(2-\cos 3x\right)^{1/\ln(1+x^2)}$.

15.а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{11x^5+7x^4-12}{x-1}$ б) $\lim\limits_{x\to0,1}\frac{10x^2-21x+2}{x^2+0{,}9x-0{,}1}$ в) $\lim\limits_{x\to7}\frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$

с) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x-1}{x^2-arctg\,2x^2}$ д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+8}{x^2+10}\right)^{\frac{x^2-1}{3}}$ е) $\lim\limits_{x\to0}\left(2-e^{\arcsin x}\right)^{2/tg\pi x}$

16.а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{15x^3+7x^2+5}{23x-17x^3+8}$ б) $\lim\limits_{x\to7}\frac{x^2-10x+21}{x^2-8x+7}$ в) $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{\sqrt{x+3}-2}$

с) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-3^{-x}}{\ln(1-2x)}$ д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+5}{2x-1}\right)^{\frac{x-2}{5}}$ е) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{3/\arcsin x^2}$

Задача 2.

Исследовать функции на непрерывность и классифицировать точки разрыва.

1. а) $f(x)=\dfrac{x+3}{x+5}$; б) $f(x)=2^{\frac{x}{1-x}}$
2. а) $f(x)=\dfrac{x}{x+2}$ б) $f(x)=3^{\frac{1-x}{x}}$
3. а) $f(x)=\dfrac{2x-1}{x+1}$ б) $f(x)=4^{\frac{x}{2+x}}$
4. а) $f(x)=\dfrac{x+3}{3-x}$ б) $f(x)=5^{\frac{2+x}{2-x}}$
5. а) $f(x)=\dfrac{x-1}{x+2}$ б) $f(x)=e^{\frac{1}{2x-1}}$
6. а) $f(x)=\dfrac{2}{3-x}$ б) $f(x)=6^{\frac{x}{x+1}}$
7. а) $f(x)=\dfrac{3}{x+2}$ б) $f(x)=7^{\frac{x}{2x+4}}$
8. а) $f(x)=\dfrac{2x}{x+4}$ б) $f(x)=8^{\frac{x}{3x-3}}$
9. а) $f(x)=\dfrac{x-1}{x}$ б) $f(x)=9^{\frac{x}{2x-2}}$
10. а) $f(x)=\dfrac{2x-1}{x^2}$ б) $f(x)=10^{\frac{1}{2+x}}$
11. а) $f(x)=\dfrac{3x}{x+2}$ б) $f(x)=11^{\frac{3}{x-3}}$
12. а) $f(x)=\dfrac{2x}{x+3}$ б) $f(x)=12^{\frac{2}{1+x}}$
13. а) $f(x)=\dfrac{3x}{x+1}$ б) $f(x)=5^{\frac{x}{x+2}}$
14. а) $f(x)=\dfrac{x-4}{x+1}$ б) $f(x)=e^{\frac{1}{x+2}}$

15.а) $f(x)=\dfrac{2}{x-3}$ б) $f(x)=8^{\frac{x}{3x-6}}$

16.а) $f(x)=\dfrac{x}{x-3}$ б) $f(x)=7^{\frac{4}{2x-1}}$

Задача 3.

1) Найти производную функции, используя основные правила дифференцирования.
2) Найти производную сложной функции.
3) Найти производную параметрически заданной функции.
4) Найти дифференциал функции при данном значении x.

1. 1) $y=0{,}17\sqrt[3]{x^2}\cdot\sin 3x+\dfrac{3e^{1-x}}{2arctgx}-\log_2\pi$ 2) $y=2\ln^2\arccos\sqrt{3x}$

3) $\begin{cases} x=t^2+1 \\ y=\sqrt{t}-1 \end{cases}$ 4) $y=2tg2x-\cos x,\quad x=\dfrac{\pi}{6}$

2. 1) $y=2{,}71x^{\frac{5}{2}}\cdot ctg2x-\dfrac{7\arcsin 3x}{\ln x}-e^3$ 2) $y=\dfrac{2}{3}\cos\sqrt{\sin 3x}$

3) $\begin{cases} x=\sqrt{2t}-\dfrac{1}{t} \\ y=arctg\,t+3 \end{cases}$ 4) $y=\dfrac{2x+1}{3x+1},\quad x=\dfrac{1}{3}$

3. 1) $y=\dfrac{1}{3}x^{-\frac{1}{2}}\cdot e^{2x}+\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{x-2}}-ctg3$ 2) $y=4\cdot\sqrt[3]{\dfrac{x^2+1}{\sin 2x}}$

3) $\begin{cases} x=\ln 2t+4 \\ y=\cos 4t+2 \end{cases}$ 4) $y=2\sin x\cdot tgx,\quad x=\dfrac{\pi}{4}$

4. 1) $y = \arcsin 2x \cdot \sqrt{x+1} + \dfrac{2\ln x}{3\cos x} - \dfrac{4}{5}$ 2) $y = ctg\,\dfrac{e^{\sqrt{x}}}{1-x}$.

3) $\begin{cases} x = 2^t - 4 \\ y = t^2 \ln 2 \end{cases}$ 4) $y = \sqrt{3x^2 - x + 5}, \quad x = 1$

5. 1) $y = 2^x \cdot (3x-1)^3 + \dfrac{\sin x}{\ln x} - 3{,}45$ 2) $y = arctg(3x \cdot e^{\sqrt{tgx}})$

3) $\begin{cases} x = tg\,2t + 1 \\ y = ctg\,2t - 1 \end{cases}$ 4) $y = 4\dfrac{x^2}{x+1}, \quad x = 2$

6. 1) $y = (2x-1)^{-3}(x + 2tgx) - \dfrac{3}{x} + \ln 2$ 2) $y = \sin(\cos 5^{2x})$

3) $\begin{cases} x = arcctg\ t \\ y = \ln(1+t^2)^2 \end{cases}$ 4) $y = \sqrt{\dfrac{2-x}{x+1}}, \quad x = 0$

7. 1) $y = -e^{-3x} \cdot \sqrt{2x} - \dfrac{7^{x+3}}{\ln x} - 0{,}44$ 2) $y = ctg\left(\sqrt[11]{(x^3 - 3x^2)}\right)$

3) $\begin{cases} x = t^2 + 2t - 3 \\ y = -\dfrac{1}{t} \end{cases}$ 4) $y = x\cos x, \quad x = \dfrac{\pi}{6}$

8. 1) $y = 0{,}21 \cdot \sqrt[4]{x} \cdot tg3x - \dfrac{2e^{3x}}{arcctgx} - \ln 3$ 2) $y = \ln^2 \arcsin\sqrt{x+1}$

3) $\begin{cases} x = 2t^2 - 1 \\ y = \sqrt{3t} + 1 \end{cases}$ 4) $y = 2\sin x - \cos 2x, \quad x = \dfrac{\pi}{6}$

9. 1) $y = 1{,}1x^{-\frac{3}{2}} \cdot tgx + \dfrac{\arccos 3x}{\ln(x-1)} - 2e^2$ 2) $y = \dfrac{3}{2}\sin\left(4^{\sqrt{\cos 2x}}\right)$

3) $\begin{cases} x = \sqrt{t+2} - t \\ y = ctgt + 3 \end{cases}$ 4) $y = \dfrac{x+2}{3x+1}, \quad x = \dfrac{2}{3}$

10. 1) $y = \dfrac{1}{2}x^{\frac{31}{2}} \cdot e^{-x} - \dfrac{x^2}{\sqrt{2x-1}} - tg3\pi$ 2) $y = \sqrt[3]{\ln\dfrac{x^2-1}{x+1}}$

3) $\begin{cases} x = 5^t + 4 \\ y = \cos t - ctg2t \end{cases}$ 4) $y = 2\sin x \cdot \arcsin x, \quad x = \dfrac{\pi}{4}$

11. 1) $y = x^{-2}\sqrt{2x-1} + \dfrac{\ln 3x}{arctg3x} + \dfrac{1}{5}$ 2) $y = \left(\dfrac{e^{\sqrt{2x}}}{ctg(1-x)}\right)^3$

3) $\begin{cases} x = 2^{2t} + e \\ y = t^3 \ln 2 \end{cases}$ 4) $y = \sqrt{3x^2 + 2x + 6}, \quad x = -1$

12. 1) $y = 5^{3x} \cdot (3x+1)^4 + \dfrac{\ln x}{\sin x} + 1{,}5$ 2) $y = arctg\left(x^2 \cdot e^{\sqrt{\cos x}}\right)$

3) $\begin{cases} x = ctg2t - e \\ y = tg2t + \ln 3 \end{cases}$ 4) $y = \dfrac{x^2-1}{x+1}, \quad x = 2$

13. 1) $y = (x+1)^3(x - 2ctgx) - \dfrac{1}{x} + \ln 10$ 2) $y = \cos(\sin\sqrt[3]{2-x})$

3) $\begin{cases} x = arctg(2^t) \\ y = (2-t^2)^2 \end{cases}$ 4) $y = \sqrt{\dfrac{2-x^3}{x}}, \quad x = 1$

14. 1) $y = arctg 2x \cdot \sqrt{3x} + \dfrac{2-x}{\ln(x+1)} - \dfrac{\pi}{3}$ 2) $y = \cos(\sqrt[5]{(e^{-3x} - x)})$

3) $\begin{cases} x = 2t^3 - 2t - 2 \\ y = \dfrac{3}{t} \end{cases}$ 4) $y = x \sin 2x, \quad x = \dfrac{\pi}{6}$

15. 1) $y = \cos 2x \cdot tg 3x - \dfrac{4^x}{\sqrt{6x}} + 2^{11}$ 2) $y = \arccos^3\left(\ln \dfrac{3 \cdot \sqrt[3]{x}}{x+1}\right)$

3) $\begin{cases} x = t \ln t \\ y = e^{-t} \end{cases}$ 4) $y = 4\left(x^2 - 3\right)^2, \quad x = 3$

16. 1) $y = e^{3x} \cdot \ln x - 2\arccos 3x + \pi$ 2) $y = \sin^2 \dfrac{x^3 - 2x}{\sqrt[3]{x^2}}$

3) $\begin{cases} x = \dfrac{1 - 2^{-2t}}{t} \\ y = \dfrac{2^{3t}}{1-t} \end{cases}$ 4) $y = \sqrt{9 + x^2}, \quad x = 4$

Задача 4.

Найти пределы, используя правило Лопиталя.

1. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln \sin 2x}{\ln \sin 5x}$; 2. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3x^2 + 2x^3}{tg^2 5x}$;

3. $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{\ln x}\right)$; 4. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{tgx - 1}{\frac{\pi}{4} - x}$;

5. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2x^3}{\sin 2x-2x}\right)$ 6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^3}{x-\sin x}$;

7. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{a^x-x^a}{x-a}$; 8. $\lim\limits_{x\to 0} x\cdot\ln x$;

9. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\arcsin x-\arcsin a}{x-a}$; 10. $\lim\limits_{x\to\infty} x^3\cdot e^{-x}$;

11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{1+2\ln\sin x}$; 12. $\lim\limits_{x\to 0} tgx\cdot\ln x$;

13. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$; 14. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$;

15. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-\sin 2x-1}{3x^2}$; 16. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-1+\cos x}{2x^2+3x}$;

Задача 5.

Методами дифференциального исчисления исследовать функцию и построить ее график.

1. $y=\dfrac{x}{2(x-1)^2}$ 2. $y=\dfrac{16x}{(2+x)^2}$

3. $y=\frac{3x-2}{x^2}$

4. $y=\frac{x^2}{x-1}$

5. $y=\frac{x^3+125}{12x}$

6. $y=\frac{x^2}{x^2-1}$

7. $y=\frac{4x-12}{\left(x-2\right)^2}$

8. $y=\frac{2x-1}{\left(x-1\right)^2}$

9. $y=\frac{x^3-1}{x^2}$

10. $y=\frac{2x}{(x+1)^2}$

11. $y=4\frac{x-2}{(x-1)^2}$

12. $y=\frac{x^2}{x+1}$

13. $y=\frac{2x}{x^2-4}$

14. $y=\frac{x^3+1}{x^2}$

15. $y=4\cdot\frac{x-1}{x^2}$

16. $y=\frac{36(x-3)}{x^2}$