

Варіант 1

1. Знайти невизначений інтеграл:

а) $\int (\sqrt{x} + 1)(x - \sqrt{x} + 1) dx$; б) $\int \frac{2x^2 + 4x + 3}{(x^2 + 2)(x - 3)} dx$; в) $\int \frac{\cos x dx}{4 + \sin^2 x}$; г) $\int \frac{x - 4}{\sqrt{x^2 - 6x + 5}} dx$.

2. Обчислити інтеграл:

а) $\int_{-3}^0 (x - 2)e^{-\frac{x}{3}} dx$; б) $\int_0^1 \sqrt{(1 - x^2)^3} dx$.

3. Обчислити площу фігур, що обмежені лініями:

$$x = \frac{1}{y\sqrt{1 + \ln y}}, \quad y = e^3, \quad y = 1, \quad x = 0.$$

4. Обчислити довжину дуг кривих:

а) $y = \ln \frac{5}{2x}, (\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{8})$; б) $\rho = a \sin \varphi, (0 \leq \varphi \leq \pi)$; в) $\begin{cases} x = e^t \cos t \\ y = e^t \sin t \end{cases} (0 \leq t \leq \ln \pi)$.

5. Визначити об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої лініями, вісь обертання Ox : $y^2 = 2x, x = 4$.

6. Знайти та зобразити множину визначення функції:

$$z = \arccos(x^2 + y^2).$$

7. Знайти повний диференціал функції 2-х змінних $f(x, y)$, а також рівняння дотичної площини та нормалі в точці $M_0(x_0, y_0)$:

$$z = x^2 - 2y^2, \quad M_0(1, 1).$$

8. Знайти похідну складної функції:

$$\frac{dz}{dt}, \text{ якщо } z = e^{2x-3y}, \text{ де } x = t \operatorname{tg} t, y = t^2 - t.$$

9. Знайти екстремум функції:

$$z = x^2 + y^2 + 2xy + 8x - 4y + 11.$$

10. Знайти загальний або частковий розв'язок диференціального рівняння:

а) $x \ln y y' = x^3 y, y(0) = e$; б) $y' + y = 3x$; в) $y'' + 3y' = 3xe^{-3x}$.

11. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y; \\ \frac{dy}{dt} = -x + 1. \end{cases}$$

Варіант 2

1. Знайти невизначений інтеграл:

а) $\int \frac{\sin 2x}{3\sin^2 x + 4} dx$; б) $\int \left(\frac{3}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \right) dx$; в) $\int \frac{2x-5}{\sqrt{x^2+4x+3}} dx$; г) $\int \frac{x^6 - 80x^2 + 12}{x^2 + 9} dx$.

2. Обчислити інтеграл:

а) $\int_0^{\pi} x^2 \sin x dx$; б) $\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^1 \frac{dx}{x^2 \sqrt{(1+x^2)^3}}$.

3. Обчислити площу фігур, що обмежені лініями:

$$y = \frac{1}{x^2} e^{1/x}, \quad y = 0, \quad x = 1, \quad x = 2.$$

4. Обчислити довжину дуг кривих:

а) $y = e^x + 6, (\ln \sqrt{8} \leq x \leq \ln \sqrt{15})$; б) $\rho = \varphi^2$; в) $\begin{cases} x = 8 \sin t + 6 \cos t \\ y = 6 \sin t - 8 \cos t \end{cases} \quad (0 \leq t \leq \pi/2)$.

5. Визначити об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої лініями, вісь обертання Ox : $xy = 4, x = 1, x = 4, y = 0$.

6. Знайти та зобразити множину визначення функції: $z = \frac{\ln(x^2 y)}{\sqrt{y-x}}$.

7. Знайти повний диференціал функції 2-х змінних $f(x, y)$, а також рівняння дотичної площини та нормалі в точці $M_0(x_0, y_0)$:

$$4z + 2x^2 - y^2 = 0, \quad M_0(2, 4).$$

8. Знайти похідну складної функції:

$$\frac{dz}{dt}, \quad \text{якщо } z = x^y, \quad \text{де } x = \ln t, \quad y = \sin t.$$

9. Знайти екстремум функції:

$$z = 3x^2 + 2y^2 + 18x - 24y - 30.$$

10. Знайти загальний або частковий розв'язок диференціального рівняння:

а) $y' = e^{-\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}, y(1) = 0$; б) $y' + y = \ln(e^x + 1)$; в) $y'' + 7y' + 12y = 24x^2 + 16x - 15$.

11. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - 2y; \\ \frac{dy}{dt} = x - y. \end{cases}$$

Варіант 3

1. Знайти невизначений інтеграл:

а) $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{e^{2x} + 4}}$; б) $\int (\sin 3x \cos 2x - \cos 3x \sin 2x) dx$; в) $\int \frac{2x+1}{x^2 + 2x+3} dx$; г) $\int \frac{x^4 + 3}{x^2 + 1} dx$.

2. Обчислити інтеграл:

а) $\int_0^{\pi/2} (x+3) \sin x dx$; б) $\int_1^2 \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} dx$.

3. Обчислити площу фігур, що обмежені лініями:

$$y = x^2 \sqrt{16 - x^2}, (0 \leq x \leq 4), y = 0.$$

4. Обчислити довжину дуг кривих:

а) $y = 1 - \ln \cos x, (0 \leq x \leq \pi/6)$; б) $\rho = 2a(2 + \cos \varphi)$;

в)
$$\begin{cases} x = R(\cos t + t \sin t) \\ y = R(\sin t - t \cos t) \end{cases} (0 \leq t \leq \pi).$$

5. Визначити об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої лініями, вісь обертання Ox : $y = 2x - x^2, y = 0$.

6. Знайти та зобразити множину визначення функції: $z = \sqrt{\ln(x^2 + y^2 - 3)}$.

7. Знайти повний диференціал функції 2-х змінних $f(x, y)$, а також рівняння дотичної площини та нормалі в точці $M_0(x_0, y_0)$:

$$z = x^2 + y^2, M_0(2, 1).$$

8. Знайти похідну складної функції:

$$\frac{dz}{dt}, \text{ якщо } z = \arctg \frac{x}{y}, \text{ де } x = e^{2t} + 1, y = e^{2t} - 1.$$

9. Знайти екстремум функції:

$$z = 5x^2 + y^2 - 12y + 17.$$

10. Знайти загальний або частковий розв'язок диференціального рівняння:

а) $ye^{2x} dx + (1 + e^{2x}) dy = 0$; б) $y' + \frac{1}{x} y = e^{x^2}, y(1) = \frac{e}{2}$; в) $y'' - y = 8e^x$.

11. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - y; \\ \frac{dy}{dt} = 6y. \end{cases}$$

Варіант 4

1. Знайти невизначений інтеграл:

а) $\int \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{x})^3}{\sqrt{ax}} dx$; б) $\int \frac{3x-1}{x^2-4x+5} dx$; в) $\int \frac{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}} dx$; г) $\int \frac{x^2-7x+5}{(x^2+1)(x-2)} dx$.

2. Обчислити інтеграл:

а) $\int_0^4 x^3 \sqrt{x^2+9} dx$; б) $\int_0^1 \frac{dx}{(x^2+3)^{1.5}}$.

3. Обчислити площу фігур, що обмежені лініями:

$$x = \sqrt{4-y^2}, x=0, y=0, y=1.$$

4. Обчислити довжину дуг кривих:

а) $y = \sqrt{1-x^2} + \arcsin x, (0 \leq x \leq \frac{7}{9})$; б) $\rho = a(1 - \cos \varphi)$; в)

$$\begin{cases} x = (t^2 - 2)\sin t + 2t \cos t \\ y = (2 - t^2)\cos t + 2t \sin t \end{cases} \quad (0 \leq t \leq \pi).$$

5. Визначити об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої лініями, вісь обертання Ox : $y = \arcsin x, x = 1$.

6. Знайти та зобразити множину визначення функції: $z = \frac{1}{x-2} - \ln(xy)$.

7. Знайти повний диференціал функції 2-х змінних $f(x, y)$, а також рівняння дотичної площини та нормалі в точці $M_0(x_0, y_0)$:

$$z = x^2 + 4y^2 - 4, M_0(1, 1).$$

8. Знайти похідну складної функції:

$$\frac{du}{dt}, \text{ якщо } u = \frac{yz}{x}, \text{ де } x = e^t, y = \ln t, z = t^2 - 1$$

9. Знайти екстремум функції:

$$z = 11x^2 + 3y^2 + 44x - 1.$$

10. Знайти загальний або частковий розв'язок диференціального рівняння:

а) $3e^x \operatorname{tg} y dx + (1 - e^x) \frac{dy}{\cos^2 y} = 0$; б) $y' + xy = x^3 y^3, y(1) = 1$; в) $y'' - 2y' + y = x^3$.

11. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4x - y; \\ \frac{dy}{dt} = x + 2y. \end{cases}$$

Варіант 5

1. Знайти невизначений інтеграл:

$$\text{а) } \int \frac{2^{x+1} - 5^{x-1}}{10^x} dx; \text{ б) } \int \frac{\sin x dx}{\sqrt[3]{3 + 2 \cos x}}; \text{ в) } \int \frac{5x-1}{x^2 + 4x + 6}; \text{ г) } \int \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \sqrt{x} \sqrt{x} dx.$$

2. Обчислити інтеграл:

$$\text{а) } \int_0^{e^2} \sqrt{x} \ln x dx; \text{ б) } \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{2-x^2} dx.$$

3. Обчислити площу фігур, що обмежені лініями:

$$y = x^2 \cos x, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad x = \frac{\pi}{2}.$$

4. Обчислити довжину дуг кривих:

$$\text{а) } y = \ln(x^2 - 1), \quad (2 \leq x \leq 3); \text{ б) } \rho = a \cdot \cos \varphi; \text{ в) } \begin{cases} x = R \cos^3 t \\ y = R \sin^3 t \end{cases}.$$

5. Визначити об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої лініями, вісь обертання Ox : $y^2 = 4x$, $x = 4$.

6. Знайти та зобразити множину визначення функції:

$$z = \arccos(x + 2) + \sqrt{y}.$$

7. Знайти повний диференціал функції 2-х змінних $f(x, y)$, а також рівняння дотичної площини та нормалі в точці $M_0(x_0, y_0)$:

$$z = 7x^2 - 4y^2 - 7, \quad M_0(1, 1).$$

8. Знайти похідну складної функції:

$$\frac{\partial z}{\partial x} \text{ й } \frac{dz}{dx}, \text{ якщо } z = \ln(e^x + e^y), \text{ де } y = \frac{1}{3}x^3 + x$$

9. Знайти екстремум функції:

$$z = 8xy + 2x + 4y + 15.$$

10. Знайти загальний або частковий розв'язок диференціального рівняння:

$$\text{а) } y' = \frac{y}{x} \ln\left(\frac{y}{x}\right), \quad y(e) = 1; \text{ б) } y' + \frac{y}{\cos^2 x} = \frac{1}{1 - \sin^2 x}; \text{ в) } y'' + 25y = \cos 5x.$$

11. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - y; \\ \frac{dy}{dt} = 4x - 3y. \end{cases}$$

Варіант 6

1. Знайти невизначений інтеграл:

$$\text{а) } \int \sin^4 2x dx; \text{ б) } \int \left(\frac{1}{x\sqrt{x}} + x\sqrt{x} \right) dx; \text{ в) } \int \frac{5x-1}{\sqrt{x^2-2x-1}} dx; \text{ г) } \int \frac{dx}{\sqrt{1+tg^2 x}}.$$

2. Обчислити інтеграл:

$$\text{а) } \int_0^1 \frac{\arcsin \frac{x}{2}}{\sqrt{4-x^2}} dx; \text{ б) } \int_0^1 \frac{x^2 dx}{(x^2+1)^2}.$$

3. Обчислити площу фігур, що обмежені лініями:

$$x = 4 - (y-1)^2, \quad x = y^2 - 4y + 3.$$

4. Обчислити довжину дуг кривих:

$$\text{а) } y = -\ln \cos x, \quad (0 \leq x \leq \pi/6); \text{ б) } \rho = 2(1 + \cos \varphi); \text{ в) } \begin{cases} x = 4(\cos t + t \sin t) \\ y = 4(\sin t - t \cos t) \end{cases} \quad (0 \leq t \leq \pi).$$

5. Визначити об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої лініями, вісь обертання Ox : $y = \sin^2 x$, $y = 0$ ($0 \leq x \leq \pi$).

6. Знайти та зобразити множину визначення функції:

$$z = \frac{1}{\sqrt{x-2y}} + \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

7. Знайти повний диференціал функції 2-х змінних $f(x, y)$, а також рівняння дотичної площини та нормалі в точці $M_0(x_0, y_0)$:

$$z = x^2 + y^2 - 10, \quad M_0(2, 2).$$

8. Знайти похідну складної функції:

$$\frac{\partial z}{\partial x} \text{ й } \frac{dz}{dx}, \text{ якщо } z = \arctg \frac{x+1}{y}, \text{ де } y = e^{(x+1)^2}$$

9. Знайти екстремум функції:

$$z = 7x^2 + 7y^2 - 28xy - 3.$$

10. Знайти загальний або частковий розв'язок диференціального рівняння:

$$\text{а) } xy' \ln y - y = 0, \quad y(1) = e^2; \text{ б) } y' + \frac{2y}{x} = \frac{2\sqrt{y}}{\cos^2 x}; \text{ в) } y'' + y' + y = (x + x^2)e^x.$$

11. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 6x - y; \\ \frac{dy}{dt} = 3x + 2y. \end{cases}$$

Варіант 7

1. Знайти невизначений інтеграл:

а) $\int (\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2})^2 dx$; б) $\int \frac{3x+1}{\sqrt{x^2+4x-1}} dx$; в) $\int \frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^4-1}} dx$; г) $\int \frac{x^2-5x+19}{(x^2+7)(x+2)} dx$.

2. Обчислити інтеграл:

а) $\int_{-2}^0 x^2 e^{-\frac{x}{2}} dx$; б) $\int_{2\sqrt{3}}^6 \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2-9}}$.

3. Обчислити площу фігур, що обмежені лініями:

$$y = x\sqrt{9-x^2}, \quad (0 \leq x \leq 3), \quad y = 0.$$

4. Обчислити довжину дуг кривих:

а) $y = \arcsin x - \sqrt{1-x^2}, \quad (0 \leq x \leq \frac{15}{16})$; б) $\rho = 5\varphi, \quad (0 \leq \varphi \leq 2\pi)$; в) $\begin{cases} x = \operatorname{ch}^3 t \\ y = \operatorname{sh}^3 t \end{cases} \quad (0 \leq t \leq a)$.

5. Визначити об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої лініями, вісь обертання Ox : $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1, \quad (0 \leq x \leq 1)$.

6. Знайти та зобразити множину визначення функції:

$$z = \frac{x}{x+y-1}.$$

7. Знайти повний диференціал функції 2-х змінних $f(x, y)$, а також рівняння дотичної площини та нормалі в точці $M_0(x_0, y_0)$:

$$z = 4x^2 - y^2 - 16, \quad M_0(1, -2).$$

8. Знайти похідну складної функції:

$$\frac{\partial z}{\partial x} \text{ й } \frac{\partial z}{\partial y} \text{ якщо } z = u^2 \ln v, \text{ де } u = \frac{y}{x}, \quad v = x^2 + y^2$$

9. Знайти екстремум функції:

$$z = x^2 - y^2 + x^2 y + 6.$$

10. Знайти загальний або частковий розв'язок диференціального рівняння:

а) $xy' - y = x \operatorname{tg} \frac{y}{x}$; б) $y' - \frac{y}{x} = x \sin x, \quad y(\pi) = 0$; в) $y'' - 7y' = (x-1)^2$.

11. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - 9y; \\ \frac{dy}{dt} = x + 8y. \end{cases}$$

Варіант 8

1. Знайти невизначений інтеграл:

$$\text{а) } \int \sqrt[3]{(x-2)^5} dx; \text{ б) } \int \frac{x \cos x}{\sin^3 x} dx; \text{ в) } \int \frac{x-2}{\sqrt{x^2+2x+3}} dx; \text{ г) } \int \frac{3x^2-x+2}{(1+x^2)(x-1)} dx.$$

2. Обчислити інтеграл:

$$\text{а) } \int_{-\frac{1}{3}}^{-\frac{2}{3}} \frac{x}{e^{3x}} dx; \text{ б) } \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^1 \frac{dx}{x^2 \cdot \sqrt{1+x^2}}.$$

3. Обчислити площу фігур, що обмежені лініями:

$$y = \sin x \cdot \cos^2 x, \quad (0 \leq x \leq \pi/2), \quad y = 0.$$

4. Обчислити довжину дуг кривих:

$$\text{а) } y = 2 + \operatorname{ch} x, \quad (0 \leq x \leq 1); \text{ б) } \rho = 3e^\varphi, \quad (0 \leq \varphi \leq a); \text{ в) } \begin{cases} x = 4\cos^3 t \\ y = 4\sin^3 t \end{cases}.$$

5. Визначити об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої лініями, вісь обертання Ox : $y = x^2$, $y^2 = x$.

6. Знайти та зобразити множину визначення функції:

$$z = \frac{2}{\sqrt{xy}} + \sqrt{x}.$$

7. Знайти повний диференціал функції 2-х змінних $f(x, y)$, а також рівняння дотичної площини та нормалі в точці $M_0(x_0, y_0)$:

$$z = x^2 - y^2, \quad M_0(1, 2).$$

8. Знайти похідну складної функції:

$$dz, \text{ якщо } z = u^2 v - v^2 u, \text{ де } u = x \sin y, \quad v = y \cos x$$

9. Знайти екстремум функції:

$$z = 3x^3 + 9y^3 + 27x^2 - 3y^2 - 4.$$

10. Знайти загальний або частковий розв'язок диференціального рівняння:

$$\text{а) } y' = (2y-3)\operatorname{tg} x, \quad y(2\pi) = 6; \text{ б) } y' + \frac{y}{x} = -xy^2; \text{ в) } y'' + 2y' + 5y = 4\sin x + 22\cos x.$$

11. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x - 2y; \\ \frac{dy}{dt} = 3x + 4y. \end{cases}$$

Варіант 9

1. Знайти невизначений інтеграл:

а) $\int (3x - 2)^{10} dx$; б) $\int \frac{7x^3 - 9}{x^4 - 5x^3 + 6x^2} dx$; в) $\int \frac{3x - 2}{\sqrt{x^2 - 4x + 5}} dx$; г) $\int \arcsin x dx$.

2. Обчислити інтеграл: а) $\int_1^2 \frac{\ln(x+1)}{(1+x)^2} dx$; б) $\int_{0,5}^{\sqrt{3}/2} \sqrt{1-x^2} dx$.

3. Обчислити площу фігур, що обмежені лініями:

$$y = x^2 \sqrt{4-x^2}, (0 \leq x \leq 2), y = 0.$$

4. Обчислити довжину дуг кривих:

а) $y = \ln(1-x^2), (0 \leq x \leq 1/4)$; б) $\rho = \frac{1}{1+\cos \varphi}, (-\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2)$;

в) $\begin{cases} x = e^t (\cos t + \sin t) \\ y = e^t (\cos t - \sin t) \end{cases} (\pi/6 \leq t \leq \pi/4)$.

5. Визначити об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої лініями, вісь обертання Ox : $y = 4x - x^2, y = 2$.

6. Знайти та зобразити множину визначення функції: $z = \frac{1}{\sqrt{9-x^2-y^2}} + \frac{1}{\sqrt{x}}$.

7. Знайти повний диференціал функції 2-х змінних $f(x, y)$, а також рівняння дотичної площини та нормалі в точці $M_0(x_0, y_0)$:

$$z = 2x^2 - 4y^2, M_0(2, 1).$$

8. Знайти похідну складної функції:

$$\frac{\partial z}{\partial x} \text{ й } \frac{\partial z}{\partial y} \text{ якщо } z = f(u, v), \text{ де } u = \frac{2y}{x+y}, v = x^2 - 3y$$

9. Знайти екстремум функції: $z = x^2 + y^2 + x + y$.

10. Знайти загальний або частковий розв'язок диференціального рівняння:

а) $y' = 2^{x-y}, y(1) = 1$; б) $y' + \frac{y}{x+2} = \frac{1}{1+x^2}$; в) $7y'' - y' = 14x$.

11. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4x - y; \\ \frac{dy}{dt} = x + 2y. \end{cases}$$

Варіант 10

1. Знайти невизначений інтеграл:

$$\text{а) } \int \frac{(\sqrt{x}+1)^2}{\sqrt{x}} dx; \text{ б) } \int \frac{3x+2}{-x^2+2x+2} dx; \text{ в) } \int \frac{x^2-4}{x^2+4} dx; \text{ г) } \int \frac{x^3}{\sqrt{x^4+1}} dx.$$

2. Обчислити інтеграл:

$$\text{а) } \int_1^{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{1}{x} dx; \text{ б) } \int_0^3 \frac{dx}{(x^2+9)\sqrt{x^2+9}}.$$

3. Обчислити площу фігур, що обмежені лініями: $y = \sqrt{e^2 - 1}$, $x = \ln 2$, $y = 0$.

4. Обчислити довжину дуг кривих:

$$\text{а) } y = 2 + \arcsin \sqrt{x} + \sqrt{x-x^2}, \left(\frac{1}{4} \leq x \leq 1\right); \quad \text{б) } \rho = 2 \sin^3 \frac{\varphi}{3};$$

$$\text{в) } \begin{cases} x = (t^2 - 2) \sin t + 2t \cos t \\ y = (2 - t^2) \cos t + 2t \sin t \end{cases} \quad (0 \leq t \leq \pi).$$

5. Визначити об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої лініями, вісь обертання

$$Ox: y = \frac{1}{4}x^2, \quad y = \frac{1}{8}x^3.$$

6. Знайти та зобразити множину визначення функції: $z = \arccos(x + y)$.

7. Знайти повний диференціал функції 2-х змінних $f(x, y)$, а також рівняння дотичної площини та нормалі в точці $M_0(x_0, y_0)$:

$$z = xy - 7, \quad M_0(1, 5).$$

8. Знайти похідну складної функції:

$$\frac{\partial z}{\partial x} \text{ й } \frac{\partial z}{\partial y} \text{ якщо } z = f(u, v), \text{ де } u = \ln(x^2 - y^2), \quad v = xy^2$$

9. Знайти екстремум функції:

$$z = x^3 - y^2 - 18x + 4y + 7.$$

10. Знайти загальний або частковий розв'язок диференціального рівняння:

$$\text{а) } 2y' = \frac{y^2}{x^2} + 8\frac{y}{x} + 8, \quad y(1) = 1; \text{ б) } y' - y \operatorname{tg} x = \sin 2x; \text{ в) } y'' + y = 2 \cos 4x + 3 \sin 4x.$$

11. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x - 5y; \\ \frac{dy}{dt} = -7x - 3y. \end{cases}$$

Варіант 11

1. Знайти невизначений інтеграл:

$$\text{а) } \int \frac{(x^2+1)(x^2-2)}{\sqrt{x^3}} dx; \text{ б) } \int \frac{8+x}{3x^2+11x-2} dx; \text{ в) } \int \frac{x^2+x+3}{(x^2-1)(x^2+1)} dx; \text{ г) } \int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx.$$

2. Обчислити інтеграл:

$$\text{а) } \int_0^1 x \cdot \arctg x dx; \text{ б) } \int_2^4 \frac{\sqrt{x^2-4}}{x} dx.$$

3. Обчислити площу фігур, що обмежені лініями:

$$y = \arccos x, \quad x = 0, \quad y = 0.$$

4. Обчислити довжину дуг кривих:

$$\text{а) } y = 1 - \ln(x^2 - 1), \quad (3 \leq x \leq 4); \text{ б) } \rho = 2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}; \text{ в) } \begin{cases} x = 3 \cos^3 t \\ y = 3 \sin^3 t \end{cases}.$$

5. Визначити об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої лініями, вісь обертання Ox : $y^2 = (x-1)^3$, $x = 2$.

6. Знайти та зобразити множину визначення функції:

$$z = \sqrt{x - \sqrt{y}}.$$

7. Знайти повний диференціал функції 2-х змінних $f(x, y)$, а також рівняння дотичної площини та нормалі в точці $M_0(x_0, y_0)$:

$$z = x^2 - 6x + 9y, \quad M_0(3, 0).$$

8. Знайти похідну складної функції:

$$\frac{\partial z}{\partial u} \text{ й } \frac{\partial z}{\partial v} \text{ якщо } z = \sqrt{\cos^2 x} + \sqrt[3]{\sin^4 y} \text{ де } x = e^{2u+v}, \quad y = 8^{u-3v}.$$

9. Знайти екстремум функції:

$$z = x^2 - 2y^3 + 54y + 10x + 4.$$

10. Знайти загальний або частковий розв'язок диференціального рівняння:

$$\text{а) } y' \cos x = y \sin x, \quad y(\pi) = 3; \text{ б) } xy' + 2y + x^5 y^3 e^x = 0; \text{ в) } y'' + y' = 49 - 2x^2.$$

11. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -7x + 5y; \\ \frac{dy}{dt} = 4x - 8y. \end{cases}$$

Варіант 12

1. Знайти невизначений інтеграл:

$$\text{а) } \int \frac{(\sqrt{x}-2)^2}{\sqrt{x}} dx; \text{ б) } \int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+3x+2}} dx; \text{ в) } \int \frac{x^2-4}{x^2+16} dx; \text{ г) } \int \frac{\sin x}{\cos^2 x+16} dx.$$

2. Обчислити інтеграл:

$$\text{а) } \int_{-\frac{1}{2}}^0 x \cdot e^{-2x} dx; \text{ б) } \int_{-0,5}^{0,5} \frac{dx}{(1-x)\sqrt{1-x^2}}.$$

3. Обчислити площу фігур, що обмежені лініями:

$$y = 2x - x^2 + 3, \quad y = x^2 - 4x + 3.$$

4. Обчислити довжину дуг кривих:

$$\text{а) } y = \frac{1 - e^x - e^{-x}}{2}, \quad (0 \leq x \leq 3); \text{ б) } \rho = \frac{1}{\varphi}, \quad \left(\frac{1}{2} \leq \varphi \leq 2\right); \text{ в) } \begin{cases} x = t^2 \\ y = t - \frac{t}{3} \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 1).$$

5. Визначити об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої лініями, вісь обертання Ox : $y^2 = 2x$, $x = 4$.

6. Знайти та зобразити множину визначення функції:

$$z = \sqrt{x+y} + \sqrt{x-y}.$$

7. Знайти повний диференціал функції 2-х змінних $f(x, y)$, а також рівняння дотичної площини та нормалі в точці $M_0(x_0, y_0)$:

$$z = 2x^2 - 4x + y^2, \quad M_0(1, 2).$$

8. Знайти похідну складної функції:

$$\frac{\partial z}{\partial u} \text{ якщо } z = tg^2(3x \cdot 8y), \text{ де } x = \ln u, \quad y = \frac{1}{2u}.$$

9. Знайти екстремум функції:

$$z = x^2 y + 28x - 49y + 8.$$

10. Знайти загальний або частковий розв'язок диференціального рівняння:

$$\text{а) } xy' = \sqrt{2x^2 + y^2} + y; \text{ б) } y' - \frac{1}{x}y = x^2 e^x, \quad y(1) = 2; \text{ в) } y'' - 3y' - 10y = \sin x + 3\cos x.$$

11. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -5x - 8y; \\ \frac{dy}{dt} = -3x - 3y. \end{cases}$$

Варіант 13

1. Знайти невизначений інтеграл:

$$\text{а) } \int \frac{dx}{x\sqrt{4-\ln^2 x}}; \text{ б) } \int \frac{4x+5}{x^2+3x+5} dx; \text{ в) } \int \frac{dx}{5+3\cos x}; \text{ г) } \int \cos^2 3x dx.$$

2. Обчислити інтеграл: а) $\int_0^{\pi/8} x^2 \sin 4x dx$; б) $\int_0^{\sqrt{2,5}} \frac{dx}{\sqrt{(5-x^2)^3}}$.

3. Обчислити площу фігур, що обмежені лініями: $x = \arccos y$, $x = 0$, $y = 0$.

4. Обчислити довжину дуг кривих:

а) $y = 4 + \arccos \sqrt{x} + \sqrt{x-x^2}$, $(0 \leq x \leq 1/2)$; б) $\rho = 6 \sin \varphi$, $(0 \leq \varphi \leq \pi/3)$; в)

$$\begin{cases} x = \cos t + \ln \operatorname{tg} \frac{t}{2} \\ y = \sin t \end{cases} \quad (\pi/2 \leq t \leq a).$$

5. Визначити об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої лініями, вісь обертання

$$Ox: y = b \left(\frac{x}{a} \right)^{\frac{2}{3}}, \quad x = a.$$

6. Знайти та зобразити множину визначення функції:

$$z = \arcsin \frac{y-1}{x}.$$

7. Знайти повний диференціал функції 2-х змінних $f(x, y)$, а також рівняння дотичної площини та нормалі в точці $M_0(x_0, y_0)$:

$$z = 2x^2 - 3y^2 + 1, \quad M_0(-1, -2).$$

8. Знайти похідну складної функції:

$$\frac{\partial z}{\partial x} \text{ й } \frac{dz}{dx} \text{ якщо } z = 3x^4 + 15x^3 - 2xy = 11, \text{ де } y = x \cos 2x.$$

9. Знайти екстремум функції:

$$z = 3x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2.$$

10. Знайти загальний або частковий розв'язок диференціального рівняння:

а) $y' \operatorname{ctg} x + y = 2$, $y(2) = 0$; б) $y' + 2y = e^2 e^x$; в) $y'' + 4y' + 4y = 8e^{-x}$.

11. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -4x - 6y; \\ \frac{dy}{dt} = -4x - 2y. \end{cases}$$

Варіант 14

1. Знайти невизначений інтеграл:

$$\text{а) } \int \frac{\cos 2x}{\sin^4 x} dx; \text{ б) } \int \frac{2x-5}{x^2-4x+6} dx; \text{ в) } \int \frac{15x-40}{(x^2+9)(x+4)} dx; \text{ г) } \int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx.$$

2. Обчислити інтеграл:

$$\text{а) } \int_0^{\pi/9} \frac{x}{\cos^2 3x} dx; \text{ б) } \int_0^{0.5} \frac{x^4 dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}.$$

3. Обчислити площу фігур, що обмежені лініями:

$$y = x^2 \sqrt{8-x^2}, (0 \leq x \leq 2\sqrt{2}), y = 0.$$

4. Обчислити довжину дуг кривих:

$$\text{а) } y = e^x + e, (\ln \sqrt{3} \leq x \leq \ln \sqrt{15}).; \quad \text{б) } \rho = 4(1 - \sin \varphi), (0 \leq \varphi \leq \pi/6); \quad \text{в) }$$

$$\begin{cases} x = 3(t - \sin t) \\ y = 3(1 - \cos t) \end{cases} (\pi \leq t \leq 2\pi).$$

5. Визначити об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої лініями, вісь обертання Ox : $y^2 = 4 + x$, $x = 2$.

6. Знайти та зобразити множину визначення функції: $z = \ln(y^2 - 4x + 8)$.

7. Знайти повний диференціал функції 2-х змінних $f(x, y)$, а також рівняння дотичної площини та нормалі в точці $M_0(x_0, y_0)$:

$$z = x^2 - 2x + y^2, M_0(1, 3).$$

8. Знайти похідну складної функції:

$$\frac{\partial z}{\partial u} \text{ й } \frac{\partial z}{\partial v} \text{ якщо } z = \operatorname{ctg}(2x + 4y), \text{ де } x = 6^{uv}, y = \ln^2 u.$$

9. Знайти екстремум функції:

$$z = x^3 + y^3 - 3xy.$$

10. Знайти загальний або частковий розв'язок диференціального рівняння:

$$\text{а) } (1-x^2)dy - (2xy^2 + xy)dx = 0; \text{ б) } y' + \frac{y}{x} = e^x, y(1) = 2; \text{ в) } y'' + 121y = 11\sin x.$$

11. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + y; \\ \frac{dy}{dt} = -10x - y. \end{cases}$$

Варіант 15

1. Знайти невизначений інтеграл:

$$\text{а) } \int ctg^3 x dx; \text{ б) } \int \frac{3x+1}{x^2+5x+7} dx; \text{ в) } \int \frac{x dx}{\sqrt{1+x^2}}; \text{ г) } \int \cos^2 x (tg^2 x - 1) dx.$$

2. Обчислити інтеграл:

$$\text{а) } \int_0^{-1} (x+1) \cdot e^{-2x} dx; \text{ б) } \int \frac{dx}{\sqrt{3} x^4 \sqrt{x^2-3}}.$$

3. Обчислити площу фігур, що обмежені лініями:

$$y = x\sqrt{1-x^2}, (0 \leq x \leq 1), y = 0.$$

4. Обчислити довжину дуг кривих:

$$\text{а) } y = \ln \frac{7}{4} - \ln x, (\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{8}).; \quad \text{б) } \rho = 5(1 - \cos \varphi), (-\pi/3 \leq \varphi \leq 0); \quad \text{в) }$$

$$\begin{cases} x = 5(t - \sin t) \\ y = 5(1 - \cos t) \end{cases} (0 < t < \pi).$$

5. Визначити об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої лініями, вісь обертання Ox : $y = \sqrt{x}$, $y = x^3$.

6. Знайти та зобразити множину визначення функції: $z = \sqrt{y^2 - 4x} + \frac{1}{\sqrt{y}}$.

7. Знайти повний диференціал функції 2-х змінних $f(x, y)$, а також рівняння дотичної площини та нормалі в точці $M_0(x_0, y_0)$:

$$z = x^2 + 4x - y^2 - 2y, M_0(1, 4).$$

8. Знайти похідну складної функції:

$$\frac{\partial z}{\partial u} \text{ якщо } z = 6^{2x+8y}, \text{ де } x = \cos u, y = \sin u.$$

9. Знайти екстремум функції:

$$z = 4(x - y) - x^2 - y^2.$$

10. Знайти загальний або частковий розв'язок диференціального рівняння:

$$\text{а) } y' + e^x = yy', y(0) = 2; \text{ б) } xy' + y = 2y^2 \ln(x); \text{ в) } y'' - 5y' = e^{2x}(2x^2 - 3x - 1).$$

11. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x + y; \\ \frac{dy}{dt} = 8x + y. \end{cases}$$

Варіант 16

1. Знайти невизначений інтеграл:

$$\text{а) } \int \frac{x + \cos x}{x^2 + 2 \sin x} dx; \text{ б) } \int \frac{2x + 5}{\sqrt{x^2 - 4x + 5}} dx; \text{ в) } \int \frac{x^2 - 10x - 23}{(x^2 + 13)(x - 3)} dx; \text{ г) } \int \frac{x}{\sqrt{x^2 - 4}} dx.$$

2. Обчислити інтеграл:

$$\text{а) } \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \arccos 2x dx; \text{ б) } \int_2^4 \frac{\sqrt{16 - x^2}}{x^4} dx.$$

3. Обчислити площу фігур, що обмежені лініями:

$$x = 4 - y^2, \quad x = y^2 - 2y.$$

4. Обчислити довжину дуг кривих:

$$\text{а) } y = 2 + \ln \cos x, \quad (0 \leq x \leq \pi/6); \text{ б) } \rho = 3e^{3\varphi/4}, \quad (-\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2); \text{ в) }$$

$$\begin{cases} x = 3(2 \cos t - \cos 2t) \\ y = 3(2 \sin t - \sin 2t) \end{cases} \quad (0 < t < 2\pi).$$

5. Визначити об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої лініями, вісь обертання Oy : $y = x^2$, $y = 0$, $x = 2$.

6. Знайти та зобразити множину визначення функції:

$$z = \sqrt{1 - x^2 - 4y^2}.$$

7. Знайти повний диференціал функції 2-х змінних $f(x, y)$, а також рівняння дотичної площини та нормалі в точці $M_0(x_0, y_0)$:

$$z = x^2 + 2y^2 - 1, \quad M_0(2, 4).$$

8. Знайти похідну неявної функції:

$$\frac{dy}{dx}, \quad \text{якщо } x^2 e^{2y} - y^2 e^{2x} = 0.$$

9. Знайти екстремум функції:

$$z = x^3 + y^2 - 6xy - 39x + 18y + 20.$$

10. Знайти загальний або частковий розв'язок диференціального рівняння:

$$\text{а) } xy' \sin \frac{y}{x} + x = y \sin \frac{y}{x}; \text{ б) } y' + \frac{1 - 2x}{x^2} y = 1, \quad y(1) = 0; \text{ в) } y'' - y = \sin x.$$

11. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4x + 6y; \\ \frac{dy}{dt} = 4x + 2y. \end{cases}$$