ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Расчётно-графические задания
и методические указания к ним
для студентов заочного обучения всех специальностей
по темам:

Элементы линейной алгебры, аналитическая геометрия, теория пределов, дифференциальное исчисление функции одной переменной

Данное пособие рассчитано на студентов заочной формы обучения и включает материал первого семестра: элементы линейной алгебры, аналитическая геометрия, теория пределов, дифференциальное исчисление функции одной переменной.

Учебное пособие предназначено для самостоятельного изучения теории и практики решения примеров. С этой целью, кроме соответствующих методических указаний, сообщается список необходимой литературы.

Каждую контрольную работу необходимо выполнять в отдельной тетради и подписывать ее по следующему образцу:

Контрольная работа № 1
по высшей математике
студента I курса группы _____
___________________________ *факультета*
Национального технического университета
"Харьковский политехнический институт"
Ф.И.О.

Дата отправки: ___________
Домашний адрес: __________
Подпись

Выполнять контрольную работу следует строго по своему варианту, в противном случае работа не проверяется.

Условия решаемых задач должны быть записаны полностью. Задачи нужно решать в порядке возрастания номеров, сохраняя номера, которые они имеют в методических указаниях. Решение задач должно иметь подробные объяснения.

Выполненные работы сдаются в деканат заочного обучения не позднее, чем за месяц до начала сессии. Получив проверенную работу, необходимо устранить допущенные ошибки. В конце работы следует заново записать условия и решения задач, имеющих ошибки. Исправленную работу необходимо сдать для проверки в кратчайший срок.

Соответствующая литература по материалу I-го семестра прилагается в конце учебного пособия.

Раздел 1
ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ И АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

Перед выполнением контрольных заданий по этой теме необходимо изучить теоретический материал по учебникам.

Контрольные вопросы

1. Понятие матрицы. Действия над матрицами.
2. Определители Вычисление определителей.
3. Обратная матрица, ее вычисление.
4. Базисный минор и ранг матрицы. Элементарные преобразования матриц.
5. Понятие системы линейных алгебраических уравнений. Теорема Кронекера-Капелли.
6. Правило Крамера. Метод Гаусса.
7. Геометрические векторы. Декартова система координат. Действия над векторами, заданными в координатной форме.
8. Скалярное произведение, его свойства. Длина вектора. Угол между векторами.
9. Векторное произведение, его свойства. Смешанное произведение, его свойства. Геометрический смысл векторного и смешанного произведения.
10. Уравнение плоскости в координатной форме. Уравнение плоскости, проходящей через три точки.
11. Уравнение прямой на плоскости и в пространстве. Уравнение прямой, проходящей через две точки.
12. Угол между прямыми. Угол между прямой и плоскостью.
13. Кривые второго порядка. Эллипс, гипербола, парабола и их канонические уравнения.
14. Приведение общего уравнения кривой второго порядка к каноническому виду.

Ниже приведено решение типичных задач контрольных заданий с краткими методическими указаниями.

1.1. Элементы линейной алгебры

<u>Задание 1.1</u>

Рассматриваются действия над матрицами

<u>Пример 1.1</u>

Дано: $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 7 & -2 \end{pmatrix}$.

Найти: а) $A \cdot B + \alpha \cdot A$;

б) $A^T \cdot B + \beta \cdot A$, где $\alpha = 2$; $\beta = -3$

Для решения примеров 1, а) и 1, б) введем некоторые понятия и определения.

1. <u>При умножении</u> матрицы на число α - умножаются все элементы на число α.

2. <u>При сложении</u> матрицы одинаковой размерности складываются соответствующие элементы обеих матриц.

3. <u>Транспонированная матрица</u> A^T получается из данной матрицы A, если поменяются местами соответствующие столбцы и строки.

4. <u>При умножении</u> матрицы A на B элементы i-ой строки и j-го столбца матрицы $C = A \cdot B$ находим по формуле: $C_{ij} = \sum_{1}^{u} a_{ik} \cdot b_{kj}$.

Опираясь на пункты 1, 2, 3, 4 решим пример 1.

а) 1) $2A = \begin{pmatrix} 4 & 10 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$, 2) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 7 & -2 \end{pmatrix} = C$.

Пусть $C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$,

тогда $C_{11} = 2 \cdot 3 + 5 \cdot 7 = 41$; $C_{12} = 2 \cdot 4 + 5 \cdot (-2) = -2$;

$C_{21} = -1 \cdot 3 + 3 \cdot 7 = 18$; $C_{22} = -4 - 6 = -10$;

таким образом, $A \cdot B = \begin{pmatrix} 41 & -2 \\ 18 & -10 \end{pmatrix}$.

3) $A \cdot B + 2 \cdot A = \begin{pmatrix} 41 & -2 \\ 18 & -10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 10 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45 & 8 \\ 16 & -4 \end{pmatrix}$.

Ответ: $A \cdot B + 2 \cdot A = \begin{pmatrix} 45 & 8 \\ 16 & -4 \end{pmatrix}$.

б) $A^T = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$; $A^T \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 7 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 3 - 7 & 2 \cdot 4 + 2 \\ 5 \cdot 3 + 3 \cdot 7 & 5 \cdot 4 + 3 \cdot 2 \end{pmatrix}$;

$A^T \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & 10 \\ 36 & 14 \end{pmatrix}$; $-3A = \begin{pmatrix} -6 & -15 \\ 3 & -9 \end{pmatrix}$;

Ответ: $A^T \cdot B - 3A = \begin{pmatrix} -7 & -5 \\ 39 & 5 \end{pmatrix}$.

Задание 1.2

Определители второго порядка $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ вычисляются по формуле

$$\Delta = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{22}.$$

Пример 1.2

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 7 \end{vmatrix} = 3 \cdot 7 - (-2) \cdot 5 = 31; \qquad \Delta = 31.$$

Если определитель размерности $n \times u$, где $n \geq 3$, то можно применять различные способы вычисления. Рассмотрим некоторые из них на примере определителя третьего порядка:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Рассмотрим следующие два способа.

1) Правило “треугольников”:

$$\Delta = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} - a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13} - a_{21} \cdot a_{12} \cdot a_{33} - a_{32} \cdot a_{23} \cdot a_{11}$$

Пример 1.3

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 1 + 3 \cdot 4 \cdot 2 + 1 \cdot 5 \cdot 0 - 0 \cdot 2 \cdot 2 - 4 \cdot 5 \cdot 1 - 3 \cdot 1 \cdot 1 = 3;$$

$\Delta = 3$.

2) Раскладываем определитель по элементам первой строки

$$\Delta = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Решим пример 3 по второму способу:

$$\Delta = 1\cdot\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} - 1\cdot\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 2\cdot\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix};$$

$$\Delta = 1\cdot(2-20) - 1\cdot(3) + 2\cdot 12 = -18 - 3 + 24 = 3; \qquad \Delta = 3.$$

<u>Задание 1.3</u>

Пусть дана матрица A размерности 3×3:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Чтобы найти матрицу A^{-1}, обратную данной, найдём:

1) $\det A = \Delta$; если $\Delta \neq 0$ матрица A^{-1} существует;

2) транспонированную матрицу

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix};$$

3) союзную матрицу

$$A^s = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix};$$

где A_{ij} - алгебраические дополнения, соответствующие элементам a_{ij};

4) искомую матрицу $\quad A^{-1} = \dfrac{A^s}{\Delta}$.

<u>Пример 1.4</u>

Дано: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

Найти: A^{-1}.

<u>Решение</u>:

1) $\det A = \Delta = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} =$

$= 1\cdot 3\cdot 2 + 2\cdot 4\cdot 0 + (-1)\cdot(-2)\cdot 1 - 1\cdot 3\cdot 0 - 4\cdot(-2)\cdot 1 - (-1)\cdot 2\cdot 2 = 20;\quad \Delta = 20$.

2) $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$; 3) $A^s = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$.

Чтобы найти A_{ij}, вычёркиваем i-ую строку и j-ый столбец матрицы A^T и полученный определитель умножаем на $(-1)^{i+j}$:

$A_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 14$; $A_{21} = -\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2$; $A_{31} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 2$;

$A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = -6$; $A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2$; $A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 2$;

$A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 5$; $A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = -5$; $A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 5$.

Таким образом, $A^s = \begin{pmatrix} 14 & 2 & 2 \\ -6 & 2 & 2 \\ 5 & -5 & 5 \end{pmatrix}$.

4) $A^{-1} = \dfrac{A^s}{\Delta} = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,1 & 0,1 \\ -0,3 & 0,1 & 0,1 \\ 0,25 & -0,25 & 0,25 \end{pmatrix}$.

Ответ: $A^{-1} = \dfrac{A^s}{\Delta} = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,1 & 0,1 \\ -0,3 & 0,1 & 0,1 \\ 0,25 & -0,25 & 0,25 \end{pmatrix}$.

Задание 1.4

Решить систему: а) по формулам Крамера;

б) с помощью обратной матрицы.

<u>Пример 1.5</u>

Дана система: $\begin{cases} x_1 - x_2 = 2; \\ 2 \cdot x_1 + 3x_2 - 2 \cdot x_3 = 5; \\ x_1 + 4 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 = 11. \end{cases}$

<u>Формулы Крамера</u>: $x_1 = \dfrac{\Delta x_1}{\Delta}$; $x_2 = \dfrac{\Delta x_2}{\Delta}$; $x_3 = \dfrac{\Delta x_3}{\Delta}$, где Δ - определитель системы, составленный из коэффициентов при неизвестных. Он равен: $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 20$ (см. пример 3).

Определители Δx_1, Δx_2, Δx_3 получаются из Δ путем замены соответствующего столбца столбцом свободных членов системы:

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 5 & 3 & -2 \\ 11 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 60;\ \Delta x_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & 11 & 2 \end{vmatrix} = 20;\ \Delta x_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 11 \end{vmatrix} = 40.$$

Таким образом, $x_1 = \dfrac{60}{20} = 3$; $x_3 = \dfrac{20}{20} = 1$; $x_3 = \dfrac{40}{20} = 2$.

Ответ: $x_1 = 3;\ x_2 = 1;\ x_3 = 2$.

Рассмотрим решение примера 5 с помощью обратной матрицы. Запишем данный пример матричным способом: $A \cdot X = B \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B$,

где $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 11 \end{pmatrix}$.

Так как $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,1 & 0,1 \\ -0,3 & 0,1 & 0,1 \\ 0,25 & -0,25 & 0,25 \end{pmatrix}$ (см. пример 4),

то $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,1 & 0,1 \\ -0,3 & 0,1 & 0,1 \\ 0,25 & -0,25 & 0,25 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 11 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,4 & 0,5 & 1,1 \\ -0,6 & 0,5 & 1,1 \\ 0,5 & -1,25 & 2,75 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Ответ: $x_1 = 3;\ x_2 = 1;\ x_3 = 2$.

<u>Задание 1.5</u>

Исследовать систему на совместность и решить ее методом Гаусса.

Пусть дана система размерности $m \times n$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_n x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2; \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \qquad (*)$$

Для исследования системы (*) на совместимость и её решения введём понятие о ранге матрицы и сформулируем теорему Кронекера - Капелли.

Если в матрицы A размерности $m \times n$ взять какие-то k строк и k столбцов $(k \le m;\ k \le n)$ и составить определители k-го порядка, то эти определители называются минорами k-го порядка данной матрицы.

<u>Определение</u>. Рангом матрицы A называется порядок наибольших отличных от нуля миноров этой матрицы.

<u>Пример 1.6</u>

Найти ранг матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 7 & 3 & 2 \\ 3 & 6 & 5 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

<u>Решение</u>. Проделаем над матрицей A элементарные преобразования, которые <u>не меняют</u> ранга матрицы, а именно, отнимем от второй строки первую, умножив её на 4; затем отнимем от третей строки первую, умножив её на 3:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 9 & -1 & 3 & -10 \\ 0 & 9 & -1 & 3 & -10 \end{pmatrix} \sim \left| l_3 - l_2 \right| \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 9 & -1 & 3 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Согласно определению ранга матрицы, можно утверждать, что $rgA = 2$, т.к. <u>все миноры</u> третьего порядка равны нулю, а хотя бы один минор второго порядка, например $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 9 \end{vmatrix} = 9 \ne 0$.

<u>Теорема Кронекера - Капелли</u>. Для того чтобы система (*) была совместна, необходимо и достаточно чтобы $rgA = rgB$,

где $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ $\quad B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$.

1) Если $rgA = rgB = n$ где, n - число неизвестных, то система (*) имеет единственное решение;

2) если $rgA = rgB < n$ - система имеет бесчисленное множество решений;

3) если $rgA \neq rgB$ – система (*) несовместна и решения не имеет.

<u>Пример 1.7</u>

Исследовать систему на совместность и решить ее методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = -11; \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 8; \\ 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 19. \end{cases}$$

Запишем матрицы A и B вместе и найдём их ранги: (l_1, l_2, l_3-номера строк матриц A и B.)

$$(A.B)=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 & -11 \\ 3 & -1 & -1 & 1 & 8 \\ 2 & -3 & -2 & 3 & 19 \end{array}\right) \sim \begin{vmatrix} l_2 & -3l_1 \\ l_3 & -2l_1 \end{vmatrix} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 & -11 \\ 0 & -7 & -4 & 7 & 41 \\ 0 & -7 & -4 & 7 & 41 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \begin{vmatrix} l_3 & -l_2 \\ & \end{vmatrix} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 & -11 \\ 0 & -7 & -4 & 7 & 41 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Так как $rgA = rgB < n = 4$, то система имеет бесчисленное множество решений. Проделав “обратный ход”, запишем систему:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = -11 \\ 7x_2 + 4x_3 - 7x_4 = -41 \end{cases}$$

Так как неизвестных четыре, а уравнений два, то пусть x_3, x_4 - “свободные” неизвестные, а x_1 и x_2 выразим через (x_3, x_4), где x_3 и x_4 - <u>любые числа:</u>

$$x_2 = \frac{-41 - 4x_3 + 7x_4}{7}; \qquad x_1 = -11 - 2\cdot\frac{-41 - 4x_3 + 7x_4}{7} - x_3 + 2x_4 = \frac{5 + x_3}{7}.$$

$$Ответ:\begin{pmatrix} \dfrac{5+x_3}{7} \\ \dfrac{-41-4x_3+7x_4}{7} \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}.$$

В частности, например, при $x_3 = 2$; и $x_4 = 1$, имеем: $x_1 = \dfrac{5+2}{7} = 1$; $x_2 = \dfrac{-41-8+7}{7} = -6$, то есть частное решение имеет вид $\{1;\,-6;\,2;\,1\}$. Проверьте самостоятельно, что частное решение удовлетворяет системе примера 6.

1.2. Действия над векторами

Определение. Вектором называется направленный отрезок. Если начало вектора находится в точке A, а окончание – в точке B, то вектор обозначают $\overrightarrow{AB}$ или одной малой буквой, например $\vec{a}$, т.е. $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$.

Пусть даны $A(x_1, y_1, z_1)$; $B(x_2, y_2, z_2)$, тогда $\overrightarrow{AB} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$

Пример 1.8

$A(5,\,7,\,-2)$; $B(3;\,8;\,0)$.

Решение. $\overrightarrow{AB} = \{3-5;\ 8-7;\ 0-(-2)\}$; $\overrightarrow{AB} = \{-2;\,1;\,2\}$.

Пусть $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ векторы, длина которых равна единице, то есть $|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$, а направление их совпадает с направлением осей OX, OY, OZ в пространственной прямоугольной системе координат, т.е. $\vec{i} \perp \vec{j} \perp \vec{k}$.

Если a_x, a_y, a_z координаты вектора $\vec{a}$; тогда $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ или $\vec{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$

В примере 8 вектор $\overrightarrow{AB}$ можно записать: $\overrightarrow{AB} = -2\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$.

Основные действия над векторами:

1) Умножение на число λ: $\lambda\vec{a} = \lambda a_x\vec{i} + \lambda a_y\vec{j} + \lambda a_z\vec{k}$.

<u>Пример 1.9</u>

$\vec{a} = 4\vec{i} - 5\vec{j} + 3\vec{k}$; $2\vec{a} = 8\vec{i} - 10\vec{j} + 6\vec{k}$.

2) Длина вектора (модуль): $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$.

<u>Пример 1.10</u>

Дано: $\vec{a} = -3\vec{i} + 4\vec{j} - 12\vec{k}$.

Найти: $|\vec{a}|$

<u>Решение</u>: $|\vec{a}| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2 + (-12)^2} = 13$.

Ответ: $|\vec{a}| = 13$.

3) Сложение векторов: если $\vec{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$ и $\vec{b} = \{b_x; b_y; b_z\}$ то

$\vec{a} \pm \vec{b} = \{a_x \pm b_x; a_y \pm b_y; a_z \pm b_z;\}$.

<u>Пример 1.11</u>

Дано: $\vec{a} = \{1; -1; 2\}$; $\vec{b} = \{3; 5; -4\}$.

Найти: $2\vec{a} - 3\vec{b}$.

<u>Решение</u>: $2\vec{a} = \{2; -2; 4\}$; $3\vec{b} = \{9; 15; -12\}$;

$2\vec{a} - 3\vec{b} = \{2-9; -2-15; 4-(-12)\} \Rightarrow 2\vec{a} - 3\vec{b} = \{-7; -17; 16\}$

или $2\vec{a} - 3\vec{b} = -7\vec{i} - 17\vec{j} + 16\vec{k}$.

4) Скалярное произведение двух векторов: $\vec{a} \cdot \vec{b} = a \cdot b \cdot \cos\varphi$, где $\varphi = \left(\widehat{\vec{a} \cdot \vec{b}}\right)$;

$a = |\vec{a}|$; $b = |\vec{b}|$;

5) Если $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ и $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$ то $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$

<u>Пример 1.12</u>

Дано: $A(3;8;5); B(1;7;10); C(4;4;3)$.

Найти: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

<u>Решение</u>:

$\overrightarrow{AB}=\{-2;-1;5\}$; $\overrightarrow{AC}=\{1;-4;-2\}$. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-2+4-10=-8$.

Ответ: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-8$.

6) Проекция вектора $\vec{a}$ на ось вектора $\vec{b}$:

$$\text{ïð}_{\vec{b}}\vec{a}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}=\frac{a_x b_x+a_y b_y+a_z b_z}{\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}.$$

7) Угол между векторами: $\cos\varphi=\dfrac{a_x b_x+a_y b_y+a_z b_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\cdot\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}$;

где $\varphi=\left(\widehat{\vec{a}\vec{b}}\right)$.

Пример 1.13

По условию примера 11 найти косинус угла между $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.

Решение:

$$\cos\varphi=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|}\Rightarrow\cos\varphi=\frac{-8}{\sqrt{4+1+25}\cdot\sqrt{1+16+4}}=\frac{-8}{\sqrt{30}\cdot\sqrt{21}}.$$

Ответ: $\cos\varphi=\dfrac{-8}{\sqrt{630}}$.

8) Векторное произведение двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, заданных координатами, вычисляется по формуле:

$$\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\end{vmatrix}\Rightarrow\vec{a}\times\vec{b}=\vec{i}\begin{vmatrix}a_y&a_z\\b_y&b_z\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}a_x&a_z\\b_x&b_z\end{vmatrix}-\vec{k}\begin{vmatrix}a_x&a_y\\b_x&b_y\end{vmatrix}.$$

С геометрической точки зрения длина вектора $|\vec{c}|=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$ равна площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, т.е. $S=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$.

Пример 1.14

Найти площадь параллелограмма построенного на векторах $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$, если $A(3;2;-1)$; $B(4;2;2)$; $C(0;3;5)$.

Решение: $\overrightarrow{AB}=\{1;0;3\};\overrightarrow{AC}=\{-3;1;6\}$ (см. пример 8).

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 0 & 3\\ -3 & 1 & 6\end{vmatrix}\Rightarrow \overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\vec{i}\left(-3\right)-\vec{j}15+\vec{k}\Rightarrow \overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=-3\vec{i}-15\vec{j}+\vec{k}$$

$$S=\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{\left(-3\right)^2+\left(-15\right)^2+1^2}=\sqrt{235}.$$

Ответ: $S=\sqrt{235}$.

9) Смешанное произведение трёх векторов, заданных их координатами, вычисляется по формуле: $\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}$.

С геометрической точки зрения смешанное произведение трёх векторов численно равно объёму параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a};\vec{b};\vec{c}$, т.е. $V=\pm\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}$

Пример 1.15

Найти объём пирамиды с вершинами в точках $A(3;4;-8)$; $B\left(1;2;2\right)$; $C\left(6;5;0\right)$; $D\left(-1;2;-7\right)$.

Решение:

$V_{пир}=\dfrac{1}{6}\cdot V_{парал.}$; $\overrightarrow{AB}=\left\{-2;-2;10\right\}$; $\overrightarrow{AC}=\left\{3;1;8\right\}$; $\overrightarrow{AD}=\left\{-4;-2;1\right\}$;

$$V_{парал.}=\begin{vmatrix}-2 & -2 & 10\\ 3 & 1 & 8\\ -4 & -1 & 1\end{vmatrix}=66;\ V_{пир}=\frac{1}{6}\cdot 66=11.$$

Ответ: $V_{пир}=11$.

1.3. Прямая на плоскости

1) Общее уравнение прямой:
$ax+by+c=0$.

2) Уравнение прямой с угловым коэффициентом:
$y=kx+b$.

3) Уравнение прямой, проходящей через точку $M_0\left(x_0,y_0\right)$:

$y-y_0=k\left(x-x_0\right)$.

4) Уравнение прямой, проходящей через две точки $\left(x_1,y_1\right)$ и $\left(x_2,y_2\right)$

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}.$$

5) Условие параллельности двух прямых $y=k_1x+b_1$ и $y=k_2x+b_2$: $k_1=k_2$;

условие перпендикулярности двух прямых: $k_1=-\dfrac{1}{k_2}$.

6) Угол между прямыми: $tg\varphi=\dfrac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}$.

Пример 1.16

Составить уравнение прямой, проходящей через точки $M_1\left(3,-1\right)$, $M_2\left(4,2\right)$.

Решение: учитывая формулу (4) имеем:

$$\frac{x-3}{4-3}=\frac{y+1}{2+1}\Rightarrow\frac{x-3}{1}=\frac{y+1}{3}\Rightarrow 3x-9=y+1.$$

$3x-y-10=0$ - это общее уравнение прямой.

Пример 1.17

Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_0\left(5,4\right)$ параллельно прямой $2x+y-3=0$.

Решение: воспользуемся условием параллельности двух прямых и формулой (3). Перепишем $2x+y-3=0$ в виде (2) $y=kx+b$;

$y=-2x+3\Rightarrow k_1=-2$, значит $k_1=-2$.

$y-4=-2(x-5)\Rightarrow y=-2x+14$.

Пример 1.18

Составить уравнение прямой через точку $M_0\left(-2,7\right)$ перпендикулярно прямой $3x+2y-5=0$.

Решение: $3x+2y-5=0\Rightarrow y=-\dfrac{3}{2}x+2{,}5$; $k_1=-\dfrac{3}{2}$, $k_2=\dfrac{2}{3}$. С учётом формулы (3):

$$y+2=\frac{2}{3}\left(x-7\right)\Rightarrow 3y+4=2x-14.$$

Ответ: $2x-3y-18=0$.

<u>Пример 1.19</u>

Найти $\angle BAC$, если $A(2,1)$, $B(4,4)$ и $C(2,2)$.

Решение: составим уравнение сторон AB и BC:

$$AB:\frac{x-2}{4-2}=\frac{y-1}{4-1}\Rightarrow\frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{3}\Rightarrow y-1=\frac{3}{2}(x-2),\quad k_{AB}=k_1=\frac{3}{2};$$

$$BC:\frac{x-2}{4-2}=\frac{y-2}{4-2}\Rightarrow\frac{x-2}{2}=\frac{y-2}{2}\Rightarrow x-2=y-2\Rightarrow y=x,\ k_{BC}=k_2=1;$$

$$tg\varphi=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}=\frac{1-\frac{3}{2}}{1-\frac{3}{2}}=\frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}}=1;\ \varphi=45^\circ.$$

1.4. Кривые второго порядка

Общий вид кривых второго порядка:

$$Ax^2+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0. \qquad (**)$$

Если $A,C>0$, то (**) определяет эллипс $(A\neq C)$ <u>или </u>окружность $(A=C)$;
если $A,C<0$, то (**) – гипербола;
если $A,C=0$ то (**) – парабола.

Уравнение кривых второго порядка с центром в начале координат:

1) окружность: $x^2+y^2=R^2$; 2) эллипс: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$;

3) гипербола: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$; 4) парабола $y^2=2px$ или $x^2=2qy$.

Уравнения кривых второго порядка $Ax^2+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$ сводятся к виду:

5) $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$ – окружность;

6) $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$ – эллипс;

7) $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$ – гипербола;

8) $(y-y_0)^2 = 2p(x-x_0)$ или $(x-x_0)^2 = 2q(y-y_0)$ – парабола.

Пример 1.20

Определить вид линии и построить:

$x^2 + y^2 - 4x + 2y + 4 = 0$.

Решение. Так как $A=1$, $C=1$, $A,C>0$, то данное уравнение – уравнение окружности.

Найдём координаты центра и радиус, выделив полные квадраты:

$$\left(x^2 - 4x + 4\right) - 4 + \left(y^2 + 2y + 1\right) - 1 + 4 = 0$$

$$(x-2)^2 + (y+1)^2 = 1$$

Центр $C(2,-1)$, $R=1$ (см. рис. 1.1).

Пример 1.21

$$4x^2 + 9y^2 - 8x + 18y - 23 = 0$$

Решение: $A=4$, $C=9$, $A=C$, $A,C>0$ - эллипс.

Найдём координаты центра и полуоси:

$$4\left(x^2 - 2x + 1\right) - 4 + 9\left(y^2 + 2y + 1\right) - 9 - 23 = 0;$$

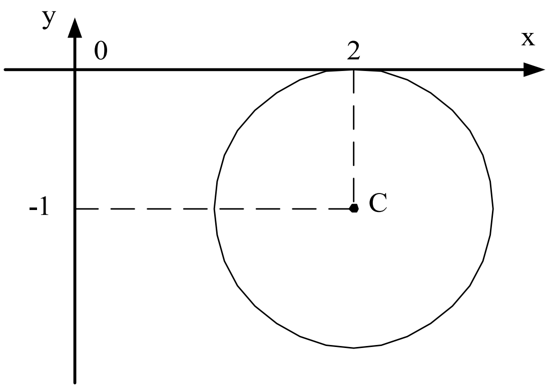

Рис. 1.1

$$4(x-1)^2 + 9(y+1)^2 = 36 \Rightarrow \frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y+1)^2}{4} = 1$$

$C(1,-1)$, $a=3$, $b=2$ (см. рис. 2).

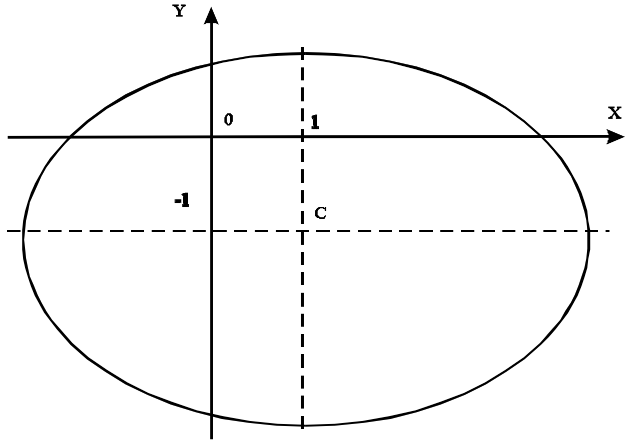

Рис. 1.2.

Пример 1.22

$9x^2 - y^2 + 18x + 4y - 31 = 0$.

Решение: $A = 9$, $C = -1$, $AC = -9 < 0$ - гипербола.

Выделяем полный квадрат: $9\left(x^2 - 2x + 1\right) - 9 - \left(y^2 - 4y + 4\right) + 4 - 31 = 0$;

$9(x-1)^2 - (y-2)^2 = 36 \Rightarrow \dfrac{(x-1)^2}{4} - \dfrac{(y-2)^2}{36} = 1$;

$C(1,2)$, $a = 2$, $b = 6$ (см. рис. 1.3).

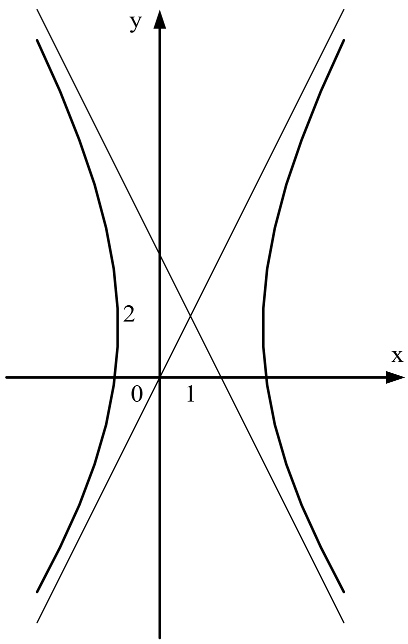

Рис. 1.3

1.5. Прямая в пространстве и плоскость

1) Общее уравнение плоскости $Ax+By+Cz+D=0$. Здесь $\{A, B, C\}$ – координаты вектора, перпендикулярного к данной плоскости: $\vec{N}=\{A, B, C\}$.

2) Уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0\left(x_0, y_0, z_0\right)$:

$A\left(x-x_0\right)+B\left(y-y_0\right)+C\left(z-z_0\right)=0$.

3) Уравнение плоскости, проходящей через три точки $M_1\left(x_1, y_1, z_1\right)$, $M_2\left(x_2, y_2, z_2\right)$ и $M_3\left(x_3, y_3, z_3\right)$:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0.$$

4) Каноническое уравнение прямой в пространстве:

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p},$$

где $\left(x_0, y_0, z_0\right)$ точка, лежащая на прямой;

m, n, p – координаты направляющего вектора прямой $\vec{S}\{m, n, p\}$.

5) Параметрическое уравнение прямой:

$x=x_0+mt$; $y=y_0+nt$; $z=z_0+pt$.

6) Уравнение прямой, проходящей через две точки $M_1\left(x_1, y_1, z_1\right)$ и $M_2\left(x_2, y_2, z_2\right)$:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_0}{y_2-y_1}=\frac{z-z_0}{z_2-z_1}.$$

7) Угол между прямой и плоскостью:

$$\sin\varphi=\frac{\vec{S}\cdot\vec{N}}{\left|\vec{S}\right|\cdot\left|\vec{N}\right|}=\frac{Am+Bn+Cp}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}}.$$

<u>**Пример 1.23**</u>

Дано: $A_1(4;3;1)$; $A_2(3;-1;5)$; $A_3(0;5;-2)$.

Найти: а) уравнение прямой, проходящей через точки A_1, A_2, в канонической и параметрической форме.

<u>Решение</u>: опираясь на формулы 4, 5, 6, имеем:

$\dfrac{x-4}{3-4}=\dfrac{y-3}{-1-3}=\dfrac{z-1}{5-1}\Rightarrow\dfrac{x-4}{-1}=\dfrac{y-3}{-4}=\dfrac{z-1}{4}$ – каноническое уравнение прямой;

параметрическое уравнение: $x=-t+4$; $y=-4t+3$; $z=4t+1$;

б) уравнение плоскости, проходящей через точки A_1, A_2, A_3.

Решение: опираясь на уравнение (3) имеем:

$$\begin{vmatrix} x-4 & y-3 & z-1 \\ 3-4 & -1-3 & 5-1 \\ 0-4 & 5-3 & -2-1 \end{vmatrix}=0; \qquad \begin{vmatrix} x-4 & y-3 & z-1 \\ -1 & -4 & 4 \\ -4 & 2 & -3 \end{vmatrix}=0;$$

$$4(x-4)-19(y-3)-18(z-1)=0\Rightarrow 4x-19y-18z-16+57+18=0.$$

Общее уравнение плоскости: $4x-19y-18z+59=0$.

в) найти угол между прямой $A_1\ A_2$ и плоскостью $A_1A_2A_3$.

Решение:

$\vec{S}\{-1,-4,4\}$, $\qquad \vec{N}\{4,-19,-18\}$;

$$\sin\varphi=\frac{-4+76-72}{\sqrt{1+16+16}\sqrt{16+361+324}}=\frac{0}{\sqrt{33}\sqrt{701}}=0;$$

$\sin\varphi=0$.

Ответ: $\varphi=0$.

Контрольные задания по теме "Элементы линейной алгебры"

Задание 1.1

Даны матрицы A и B. Найти $A\cdot B+\alpha A$ (см. пример 1.1).

1. $A=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 0 & 2\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 3 & -4\end{pmatrix}$; $\alpha=4$; 2. $A=\begin{pmatrix}7 & 5\\ 3 & 2\end{pmatrix}$; $B=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 4\end{bmatrix}$; $\alpha=3$;

3. $A=\begin{pmatrix}-2 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}7 & 5\\ 1 & 8\end{pmatrix}$; $\alpha=-2$; 4. $A=\begin{pmatrix}-6 & 1\\ 0 & 4\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 5\end{pmatrix}$; $\alpha=-3$;

5. $A=\begin{pmatrix}7 & -6\\ 2 & 2\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}0 & 3\\ 4 & -1\end{pmatrix}$; $\alpha=5$; 6. $A=\begin{pmatrix}7 & 4\\ -3 & 2\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 3 & 5\end{pmatrix}$; $\alpha=-4$;

7. $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 6 & 2\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}-1 & -2\\ 4 & 0\end{pmatrix}$; $\alpha=2$; 8. $A=\begin{pmatrix}3 & 4\\ -2 & 7\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 5\end{pmatrix}$; $\alpha=-5$;

9. $A=\begin{pmatrix}6 & -4\\ 7 & 2\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & -3\end{pmatrix}$; $\alpha=7$; 10. $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}4 & -4\\ 3 & 0\end{pmatrix}$; $\alpha=-2$;

11. $A=\begin{pmatrix}3 & 6\\ 10 & 4\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 3 & 1\end{pmatrix}$; $\alpha=3$; 12. $A=\begin{pmatrix}2 & -3\\ 8 & 1\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}0 & 4\\ 7 & 5\end{pmatrix}$; $\alpha=-3$;

13. $A=\begin{pmatrix}6 & 7\\ 0 & 10\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}2 & -3\\ 4 & 1\end{pmatrix}$; $\alpha=4$;14. $A=\begin{pmatrix}6 & 12\\ -3 & 2\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & -2\end{pmatrix}$; $\alpha=-4$;

15. $A=\begin{pmatrix}-3 & 4\\ 2 & 0\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}1 & -8\\ 4 & 7\end{pmatrix}$; $\alpha=6$; 16. $A=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 7 & 9\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & -3\end{pmatrix}$; $\alpha=-6$.

Дана матрица A; найти $A\cdot A^T+\beta A$.

17. $A=\begin{pmatrix}3 & 7\\ 1 & 0\end{pmatrix}$; $\beta=2$; 18. $A=\begin{pmatrix}-3 & 4\\ 2 & 5\end{pmatrix}$; $\beta=4$; 19. $A=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 5 & 4\end{pmatrix}$; $\beta=-4$;

20. $A=\begin{pmatrix}7 & 3\\ 8 & -1\end{pmatrix}$; $\beta=-3$; 21. $A=\begin{pmatrix}-2 & 4\\ 0 & 5\end{pmatrix}$; $\beta=3$; 22. $A=\begin{pmatrix}7 & 2\\ 0 & -3\end{pmatrix}$; $\beta=5$;

23. $A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 6 & 4\end{pmatrix}$; $\beta=-5$; 24. $A=\begin{pmatrix}4 & 8\\ 10 & 0\end{pmatrix}$; $\beta=2$; 25. $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$; $\beta=-2$;

26. $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & -2\end{pmatrix}$; $\beta=7$; 27. $A=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 3 & 2\end{pmatrix}$; $\beta=-6$; 28. $A=\begin{pmatrix}4 & 6\\ 3 & 2\end{pmatrix}$; $\beta=5$;

29. $A=\begin{pmatrix}10 & 0\\ -2 & 1\end{pmatrix}$; $\beta=-3$; 30. $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -2 & 2\end{pmatrix}$; $\beta=4$.

Задание 1.2

Вычислить определитель (см. примеры 1.2, 1.3).

1. $\begin{vmatrix}1 & 2 & -3\\ 4 & 5 & 7\\ 3 & 2 & 0\end{vmatrix}$; 2. $\begin{vmatrix}2 & 7 & 0\\ 3 & 5 & 4\\ -1 & 12 & 3\end{vmatrix}$; 3. $\begin{vmatrix}4 & 2 & 1\\ 0 & 3 & 5\\ 2 & -1 & 2\end{vmatrix}$; 4. $\begin{vmatrix}1 & -1 & 5\\ 6 & 7 & -3\\ 0 & 2 & 1\end{vmatrix}$;

5. $\begin{vmatrix}-2 & -3 & 8\\ 1 & 1 & 0\\ 2 & -3 & 7\end{vmatrix}$; 6. $\begin{vmatrix}4 & -3 & 2\\ 1 & 0 & 1\\ 5 & 6 & -3\end{vmatrix}$; 7. $\begin{vmatrix}1 & -8 & 4\\ 6 & 9 & -2\\ 0 & 1 & 3\end{vmatrix}$; 8. $\begin{vmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & -1 & 5\\ 4 & 0 & -7\end{vmatrix}$;

9. $\begin{vmatrix}6 & 4 & 2\\ 3 & 1 & -8\\ 5 & 3 & 0\end{vmatrix}$; 10. $\begin{vmatrix}-4 & 7 & 5\\ 0 & 2 & 1\\ 1 & 4 & 9\end{vmatrix}$; 11. $\begin{vmatrix}0 & 4 & -5\\ 1 & 1 & 2\\ 3 & 5 & -5\end{vmatrix}$; 12. $\begin{vmatrix}6 & 6 & 5\\ 5 & 7 & -3\\ 0 & 2 & 8\end{vmatrix}$;

13. $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 8 \\ 5 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & -9 \end{vmatrix}$; 14. $\begin{vmatrix} 2 & 9 & 0 \\ 10 & 1 & 4 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$; 15. $\begin{vmatrix} 8 & -2 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \\ -1 & 7 & 6 \end{vmatrix}$; 16. $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & -5 \end{vmatrix}$;

17. $\begin{vmatrix} 6 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & -4 \end{vmatrix}$; 18. $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 8 & 3 \\ 5 & 7 & -4 \end{vmatrix}$; 19. $\begin{vmatrix} 5 & 7 & 4 \\ -3 & 0 & 2 \\ 6 & 9 & 1 \end{vmatrix}$; 20. $\begin{vmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 12 & 1 & -2 \end{vmatrix}$;

21. $\begin{vmatrix} 6 & 11 & -5 \\ 0 & 4 & 1 \\ 3 & -2 & 8 \end{vmatrix}$; 22. $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 5 & 9 & 4 \end{vmatrix}$; 23. $\begin{vmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 8 & 9 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$; 24. $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 5 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix}$;

25. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 5 & 3 & -7 \\ 6 & 4 & 3 \end{vmatrix}$; 26. $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 5 & 9 \\ 3 & 6 & 8 \end{vmatrix}$; 27. $\begin{vmatrix} 15 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$; 28. $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & -6 & 2 \end{vmatrix}$;

29. $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 7 \\ 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix}$; 30. $\begin{vmatrix} -2 & -8 & 18 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$.

Задание 1.3

Найти матрицу, обратную данной (см. пример 1.4).

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; 2. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$; 3. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$; 4. $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

5. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & -2 \\ 5 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; 6. $\begin{pmatrix} 0 & 5 & 4 \\ -1 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$; 7. $\begin{pmatrix} -2 & -5 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$; 8. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ -5 & -4 & 1 \end{pmatrix}$;

9. $\begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 5 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; 10. $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 5 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$; 11. $\begin{pmatrix} 4 & -1 & 5 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; 12. $\begin{pmatrix} 3 & 7 & 5 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;

13. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ -4 & -5 & 2 \end{pmatrix}$; 14. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 7 & 5 & -2 \\ -2 & -3 & 3 \end{pmatrix}$; 15. $\begin{pmatrix} 2 & 7 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \\ 3 & 5 & 0 \end{pmatrix}$; 16. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$;

17. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$; 18. $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$; 19. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$; 20. $\begin{pmatrix} 7 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$;

21. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; 22. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -4 & -5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$; 23. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$; 24. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$;

25. $\begin{pmatrix} 1 & 8 & 5 \\ 3 & 6 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$; 26. $\begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 6 & -4 & 1 \\ 2 & 7 & -1 \end{pmatrix}$; 27. $\begin{pmatrix} 1 & -3 & -14 \\ 6 & 5 & 11 \\ 4 & 3 & 6 \end{pmatrix}$; 28. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 5 & 4 & 0 \\ 4 & 2 & -2 \end{pmatrix}$;

29. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; 30. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

Задание 1.4

Решить систему по формулам Крамера и с помощью обратной матрицы (см. пример 1.5).

1. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3; \\ -2x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 10; \\ x_2 + x_3 = 2; \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = -2; \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 5; \\ 2x_2 + 2x_3 = 5; \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 5; \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 5; \\ 4x_1 + 5x_3 = 3; \end{cases}$

4. $\begin{cases} 3x_2 + 2x_3 = 7; \\ x_1 - x_2 - 2x_3 = -4; \\ 3x_1 + x_3 = 5; \end{cases}$

5. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 10; \\ 4x_1 - 2x_3 = 8; \\ 5x_1 + x_2 = 12; \end{cases}$

6. $\begin{cases} 5x_2 + 4x_3 = -7; \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 8; \\ x_1 + 2x_2 = -2; \end{cases}$

7. $\begin{cases} -2x_1 - 5x_2 + x_3 = -9; \\ 2x_2 + 4x_3 = 1; \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 5; \end{cases}$

8. $\begin{cases} x_1 + 2x_3 = 5; \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 8; \\ -5x_1 - 4x_2 + x_3 = -3; \end{cases}$

9. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 18; \\ 5x_1 + x_2 - x_3 = 13; \\ 2x_2 + x_3 = 6; \end{cases}$

10. $\begin{cases} -2x_2 + 5x_3 = 13; \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 10; \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 1; \end{cases}$

11. $\begin{cases} 4x_1 - x_2 + 5x_3 = 13; \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 7; \\ 2x_2 + x_3 = 7; \end{cases}$

12. $\begin{cases} 3x_1 + 7x_2 + 5x_3 = 16; \\ x_1 + 3x_2 = -2; \\ x_1 + x_2 = 0; \end{cases}$

13. $\begin{cases} x_1 - x_2 = -2; \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 11; \\ -4x_1 - 5x_2 + 2x_3 = -15; \end{cases}$

14. $\begin{cases} x_1 + 2x_3 = 4; \\ 7x_1 + 5x_2 - 2x_3 = -3; \\ -2x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 8; \end{cases}$

15. $\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + x_3 = 9; \\ -2x_1 - 2x_2 + x_3 = 0; \\ 3x_1 + 5x_2 = 5; \end{cases}$

16. $\begin{cases} x_1 + 3x_3 = -4; \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 8; \\ x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 9; \end{cases}$

17. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 7; \\ -2x_1 - 4x_2 + x_3 = -8; \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 10; \end{cases}$

18. $\begin{cases} 2x_2 - 3x_3 = -14; \\ x_1 - 4x_3 = -5; \\ 2x_2 - x_3 = -10; \end{cases}$

19. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 2; \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 = 7; \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = 5; \end{cases}$

20. $\begin{cases} 7x_1 + 4x_2 = 5; \\ x_1 + x_3 = 4; \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 15; \end{cases}$

21. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 7; \\ x_2 + 2x_3 = 8; \\ x_1 + x_2 = 2; \end{cases}$

22. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4; \\ -2x_1 - 4x_2 - 5x_3 = -6; \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 5; \end{cases}$

23. $\begin{cases} x_1 + 2x_3 = 9; \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 = 1; \\ x_2 - x_3 = -5; \end{cases}$

24. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = 3; \\ x_2 - x_3 = 1,5; \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 8; \end{cases}$

25. $\begin{cases} x_1 + 8x_2 + 5x_3 = -14; \\ 3x_1 + 6x_2 + 4x_3 = -9; \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = -5; \end{cases}$

26. $\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + x_3 = -2; \\ 6x_1 - 4x_2 + x_3 = 2; \\ 2x_1 + 7x_2 - x_3 = 9; \end{cases}$

27. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 - 14x_3 = -3; \\ 6x_1 + 5x_2 + 11x_3 = 5; \\ 4x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 3; \end{cases}$

28. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 10,5; \\ 5x_1 + 4x_2 = 6,5; \\ 4x_1 + 2x_2 - 2x_3 = -3; \end{cases}$

29. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 10; \\ 2x_1 - x_3 = 1; \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 8; \end{cases}$

30. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 7; \\ 4x_1 + 3x_2 = 17; \\ 5x_1 + 4x_2 + x_3 = 17. \end{cases}$

<u>Задание 1.5</u>

Исследовать систему на совместность и решить ее методом Гаусса (см. примеры 1.6, 1.7).

1. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 = 2; \\ x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 = -1; \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 - x_4 = 1; \end{cases}$

2. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = 4; \\ 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 + x_4 = 1; \\ 3x_1 - 2x_2 + 8x_3 = 5; \end{cases}$

3. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2; \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 2; \\ 4x_1 + 3x_3 - 2x_4 = 4; \end{cases}$

4. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 2; \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = -4; \\ 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 = -2; \end{cases}$

5. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 4; \\ x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 = -1; \\ x_1 - 2x_3 + 5x_4 = 5; \end{cases}$

6. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 7; \\ x_1 + x_2 + 5x_3 - 2x_4 = -3; \\ 3x_1 + 4x_2 + 4x_3 - x_4 = 4; \end{cases}$

7. $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - x_3 - x_4 = 3; \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 6x_4 = 12; \\ 4x_1 + 5x_2 + x_3 + 5x_4 = 15; \end{cases}$

8. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 3; \\ 4x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 8; \\ 3x_1 - 4x_2 - 3x_3 + 3x_4 = 5; \end{cases}$

9. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = -4; \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 = -1; \\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 2x_4 = -5; \end{cases}$

10. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 - 2x_4 = -1; \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 3; \\ x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 5x_4 = -4; \end{cases}$

11. $\begin{cases} 4x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -6; \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = -7; \\ x_1 + 2x_2 + 3x_4 = 1; \end{cases}$

12. $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 2; \\ 4x_1 + x_2 + x_3 - 5x_4 = 1; \\ 3x_1 + 2x_2 - 6x_4 = -1; \end{cases}$

13. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 = -3; \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = -1; \\ -x_1 + 4x_2 + x_3 + 6x_4 = -2; \end{cases}$

14. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 4x_3 + 3x_4 = 9; \\ -x_1 - x_2 + 5x_3 + x_4 = -3; \\ x_1 + x_3 + 4x_4 = 6; \end{cases}$

15. $\begin{cases} x_1 + 7x_2 - x_3 + x_4 = 10; \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 = 7; \\ -2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 3; \end{cases}$

16. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 - 3x_4 = 1; \\ x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 2; \\ x_1 + 5x_2 + 5x_3 - 8x_4 = 0; \end{cases}$

17. $\begin{cases} x_1 - x_2 - 4x_3 + 5x_4 = 1; \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 6x_4 = -3; \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = -2; \end{cases}$

18. $\begin{cases} 4x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = 1; \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1; \end{cases}$

19. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - 6x_4 = 7; \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 9; \\ x_1 + 2x_3 + 9x_4 = 2; \end{cases}$

20. $\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 - x_3 + x_4 = 4; \\ x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 = 26; \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 3x_4 = -22; \end{cases}$

21. $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 21; \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 3; \\ x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 2x_4 = -18; \end{cases}$

22. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 4; \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 7x_4 = 16; \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + 9x_4 = 20; \end{cases}$

23. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 = -4; \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = 5; \\ x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 3x_4 = -9; \end{cases}$

24. $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 7x_4 = 6; \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 + 5x_4 = 5; \\ 3x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 12x_4 = 11; \end{cases}$

25. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 7x_3 - x_4 = 18; \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 3; \\ x_1 - 4x_2 + 4x_3 - 6x_4 = 15; \end{cases}$

26. $\begin{cases} -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = -5; \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0; \\ 2x_1 + 3x_3 - 4x_4 = 5; \end{cases}$

27. $\begin{cases} -2x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 = 4; \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = -3; \\ -x_1 - x_2 + 4x_3 - x_4 = 1; \end{cases}$

28. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 4x_3 + 3x_4 = -2; \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 2; \\ -x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 2x_4 = -4; \end{cases}$

29. $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 = -15; \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 + x_4 = 2; \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 4x_4 = -13; \end{cases}$

30. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 13; \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 7; \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 + x_4 = 20. \end{cases}$

Контрольные задания по теме " Действия над векторами"

Задание 1.6

1. Найти косинус угла между $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ (см. пример 1.13).

2. Найти проекцию $\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}\right)$ на $\overrightarrow{AC}$.

3. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ (см. пример 1.14).

4. Вычислить объём пирамиды с вершинами в точках A, B, C и D (см. пример 1.15), если:

1. $A(2;1;3)$, $B(3;3;2)$, $C(0;2;1)$ и $D(3;7;4)$

2. $A(3;-1;5)$, $B(-3;1;2)$, $C(4;1;7)$ *и* $D(0;3;8)$

3. $A(5;2;1)$, $B(1;-1;13)$, $C(4;1;-1)$ *и* $D(3;2;-7)$

4. $A(0;2;2)$, $B(1;0;4)$, $C(6;0;5)$ *и* $D(1;-4;5)$
5. $A(-1;4;0)$, $B(1;2;1)$, $C(11;1;4)$ *и* $D(6;5;8)$
6. $A(3;4;-3)$, $B(5;4;-3)$, $C(4;6;-1)$ *и* $D(3;7;10)$
7. $A(2;1;5)$, $B(4;0;3)$, $C(0;0;7)$ *и* $D(1;0;-7)$
8. $A(7;3;2)$, $B(3;-1;0)$, $C(6;1;4)$ *и* $D(7;7;8)$
9. $A(1;-5;8)$, $B(3;-7;7)$, $C(-2;-3;2)$ *и* $D(1;9;-2)$
10. $A(2;7;3)$, $B(3;5;1)$, $C(4;9;4)$ *и* $D(8;-7;6)$
11. $A(9;2;3)$, $B(7;5;-3)$, $C(6;-2;15)$ *и* $D(1;5;9)$
12. $A(2;11;-4)$, $B(1;4;-4)$, $C(4;13;-3)$ *и* $D(6;-5;3)$
13. $A(3;4;5)$, $B(2;2;7)$, $C(5;3;3)$ и $D(8;2;4)$
14. $A(3;-2;4)$, $B(0;2;-8)$, $C(6;0;-2)$ и $D(1;-8;7)$
15. $A(-4;-3;7)$, $B(-2;3;4)$, $C(-6;-1;8)$ и $D(3;5;-12)$
16. $A(3;4;9)$, $B(0;0;9)$, $C(5;3;7)$ и $D(2;13;5)$
17. $A(4;-4;1)$, $B(2;-6;0)$, $C(0;-1;13)$ и $D(2;12;-3)$
18. $A(0;1;2)$, $B(2;0;4)$, $C(6;3;-1)$ и $D(-1;8;3)$
19. $A(-2;3;6)$, $B(0;1;5)$, $C(10;0;2)$ и $D(0;1;0)$;
20. $A(1;7;4)$, $B(3;5;5)$, $C(-2;3;4)$ и $D(1;4;-5)$
21. $A(7;3;-3)$, $B(5;1;-4)$, $C(4;1;3)$*и* $D(2;5;13)$
22. $A(8;-3;6)$, $B(5;1;6)$, $C(9;-1;4)$ и $D(3;-7;0)$
23. $A(2;3;2)$, $B(0;5;1)$, $C(5;1;8)$ и $D(0;8;4)$
24. $A(1;4;2)$, $B(0;2;4)$, $C(4;0;-10)$ и $D(-1;2;6)$
25. $A(6;4;7)$, $B(2;1;7)$, $C(8;2;6)$ и $D(3;-3;4)$
26. $A(-3;1;2)$, $B(0;5;2)$, $C(-1;4;-4)$ и $D(7;6;5)$
27. $A(-3;-2;1)$, $B(6;-2;1)$, $C(-6;2;1)$ и $D(1;8;10)$
28. $A(2;0;5)$, $B(4;2;6)$, $C(0;3;-1)$ и $D(-8;7;4)$
29. $A(-8;1;2)$, $B(-8;4;-2)$, $C(-10;0;4)$ и $D(6;-8;1)$
30. $A(1;-2;3)$, $B(0;0;5)$, $C(2;0;1)$ и $D(7;6;5)$.

<u>Задание 1.7</u>

Составить:

1. Уравнение прямой AB (см. пример 1.16);
2. Уравнение прямой через точку C перпендикулярно прямой AB (см. пример 1.18);
3. Уравнение прямой через точку C параллельно прямой AB (см. пример 1.17);
4. Угол $\angle BAC$ (см. пример 1.19), если:

1. $A(3;4)$, $B(0;2)$ и $C(3;-5)$
2. $A(2;0)$, $B(1;-3)$ и $C(4;2)$
3. $A(1;-1)$, $B(6;5)$ и $C(2;4)$
4. $A(-2;3)$, $B(4;4)$ и $C(-2;4)$
5. $A(0;2)$, $B(2;6)$ и $C(1;3)$
6. $A(-3;\ 5)$, $B(2;\ 7)$ и $C(3;\ -4)$
7. $A(2;1)$, $B(1;4)$ и $C(8;5)$
8. $A(2;-5)$, $B(0;2)$ и $C(1;-5)$
9. $A(4;-3)$, $B(2;5)$ и $C(0;7)$
10. $A(-5;2)$, $B(3;4)$ и $C(1;4)$
11. $A(0;\ -3)$, $B(3;\ 2)$ и $C(4;\ -2)$
12. $A(1;-1)$, $B(2;2)$ и $C(3;0)$
13. $A(-5;-4)$, $B(3;1)$ и $C(-1;2)$
14. $A(0;6)$, $B(2;5)$ и $C(3;7)$
15. $A(-1;-2)$, $B(1;3)$ и $C(4;-2)$
16. $A(-1;-3)$, $B(2;5)$ и $C(2;9)$
17. $A(3;4)$, $B(-1;1)$ и $C(2;3)$
18. $A(-2;6)$, $B(1;2)$ и $C(0;3)$
19. $A(-3;2)$, $B(2;5)$ и $C(1;-1)$
20. $A(1;1)$, $B(-3;4)$ и $C(5;6)$
21. $A(4;4)$, $B(-2;0)$ и $C(3;-5)$
22. $A(6;3)$, $B(3;2)$ и $C(1;-2)$
23. $A(-5;-1)$, $B(4;2)$ и $C(0;1)$
24. $A(1;1)$, $B(3;5)$ и $C(-2;0)$
25. $A(7;3)$, $B(4;4)$ и $C(-2;2)$
26. $A(7;6)$, $B(3;6)$ и $C(1;-3)$
27. $A(1;2)$, $B(3;0)$ и $C(2;7)$
28. $A(2;8)$, $B(3;4)$ и $C(1;-5)$
29. $A(3;-3)$, $B(-2;2)$ и $C(-1;-5)$
30. $A(6;-4)$, $B(4;0)$ и $C(2;2)$.

Контрольные задания по теме "Кривые второго порядка"

<u>Задание 1.8</u>

Определить вид линии и построить ее (см. примеры 1.20, 1.21, 1.22):

1. $3x^2+4y^2-6x+8y+7=0$
2. $4x^2-3y^2+8x+6y+1=0$
3. $x^2+4x-2y+5=0$
4. $x^2+y^2-2x+4y+1=0$
5. $5x^2+4y^2-20x-24y+36=0$
6. $4x^2+9y^2-24x-18y+9=0$

7. $x^2+y^2+6x-4y+4=0$
8. $y^2+4x+2y-3=0$
9. $x^2+4y^2+10x-8y+25=0$
10. $9x^2-5y^2-18x+30y-54=0$
11. $9x^2+4y^2-54x+24y+81=0$
12. $x^2+y^2+8x-6y=0$
13. $-x^2+4x+y-2=0$
14. $4x^2+6y^2+8x-24y+4=0$
15. $4x^2-9y^2-16x-36y-56=0$
16. $x^2+y^2+8x-6y+24=0$
17. $2y^2+x-4y+7=0$
18. $4x^2+16y^2-24x-32y-12=0$
19. $9x^2-4y^2-36x+16y-16=0$
20. $x^2+y^2+10x-6y+30=0$
21. $x^2+4x+2y-5=0$
22. $4x^2+y^2-32x+4y+64=0$
23. $2x^2-y^2+4x-6y-11=0$
24. $x^2+y^2+10x+4y+20=0$
25. $y^2+2x-6y+5=0$
26. $9x^2+4y^2+18x-8y-18=0$
27. $x^2-16y^2-6x+32y-8=0$
28. $2y^2-x+4y+9=0$
29. $x^2+y^2-6x+8y+9=0$
30. $9x^2+2y^2+36x-16y+50=0$

Контрольные задания по теме "Прямая в пространстве и плоскость"

Задание 1.9

Даны три точки A, B, C . Найти:

1. Уравнение прямой AB, каноническое и параметрическое (см. пример 1.23, а));
2. Уравнение плоскости ABC (см. пример 123, б));
3. Угол между прямой AB и плоскостью ABC (см. пример 1.23, в)).

1. $A(2;1;2)$, $B(3;1;4)$, $C(1;2;2)$
2. $A(4;6;5)$, $B(3;5;6)$, $C(7;4;2)$
3. $A(2;5;-3)$, $B(-1;1;4)$, $C(0;1;-5)$
4. $A(2;3;7)$, $B(4;2;5)$, $C(3;7;4)$
5. $A(-2;3;0)$, $B(1;-1;2)$, $C(4;6;7)$
6. $A(5;-5;4)$, $B(6;-4;4)$, $C(3;8;5)$
7. $A(-3;-4;1)$, $B(2;2;2)$, $C(0;-5;7)$
8. $A(6;0;3)$, $B(4;2;2)$, $C(4;7;2)$
9. $A(-1;2;4)$, $B(3;5;1)$, $C(2;1;2)$
10. $A(4;-1;5)$, $B(2;1;2)$, $C(3;0;3)$
11. $A(0;2;-8)$, $B(1;0;-7)$, $C(3;1;-9)$
12. $A(9;1;-8)$, $B(6;2;-10)$, $C(3;4;4)$
13. $A(0;4;2)$, $B(-1;2;3)$, $C(2;1;5)$
14. $A(3;4;-2)$, $B(1;5;2)$, $C(2;2;2)$
15. $A(-1;0;2)$, $B(6;2;4)$, $C(2;-1;7)$
16. $A(4;7;-2)$, $B(-1;7;0)$, $C(2;6;1)$
17. $A(-1;2;8)$, $B(0;5;2)$, $C(2;4;-3)$
18. $A(6;4;-3)$, $B(5;5;5)$, $C(1;-2;5)$

19. $A(-2;0;3)$, $B(0;1;2)$, $C(1;2;-1)$ 20. $A(1;8;-2)$, $B(2;6;0)$, $C(3;3;3)$
21. $A(8;1;4)$, $B(6;0;2)$, $C(7;-3;4)$ 22. $A(0;-2;3)$, $B(1;4;-2)$, $C(-2;6;7)$
23. $A(4;1;-7)$, $B(2;2;-8)$, $C(0;-2;-5)$ 24. $A(5;3;2)$, $B(-1;4;0)$, $C(2;3;-3)$
25. $A(1;-1;2)$, $B(9;-7;4)$, $C(1;2;1)$ 26. $A(-5;2;1)$, $B(4;3;2)$, $C(2;1;2)$
27. $A(2;-9;2)$, $B(0;-7;1)$, $C(6;5;2)$ 28. $A(5;2;-3)$, $B(4;-1;2)$, $C(1;7;-4)$
29. $A(1;3;-2)$, $B(2;3;1)$, $C(4;-8;1)$ 30. $A(1;2;-2)$, $B(3;1;2)$, $C(4;7;1)$.

Раздел 2
ПРЕДЕЛЫ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ

Перед выполнением контрольных заданий по этой теме необходимо изучить теоретический материал по учебникам [1] (гл.II) или [2] (гл.V).

Контрольные вопросы

1. Множества. Отображение. Функция.
2. Область определения и область значений функции.
3. Предел функции.
4. Предел числовой последовательности.
5. Бесконечно малые величины и бесконечно большие величины. Связь между ними.
6. Свойства бесконечно малых величин.
7. Связь между пределами и бесконечно малыми величинами.
8. Теоремы о пределе арифметических действий.
9. Признаки существования предела.
10. 1-й замечательный предел. Следствия.
11. 2-й замечательный предел. Следствия.
12. Непрерывность функции.
13. Теоремы о непрерывных функциях.
14. Непрерывность сложной функции.
15. Непрерывность обратной функции.
16. Свойства функций, непрерывных на отрезке.
17. Точки разрыва функции.
18. Сравнение бесконечно малых величин и бесконечно больших величин.

Приведем решение типичных задач контрольных заданий с краткими методическими указаниями.

Задание 2.1

При выполнении этого задания удобно пользоваться таблицей областей определения основных элементарных функций.

Таблица 2.1

Функция	Область определения
1. Многочлен: $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$, $a_n \neq 0,\ n \in N$	$(-\infty, \infty)$
2. Рациональная функция: $\dfrac{a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0}{b_mx^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1x + b_0}$, $a_n \neq 0,\ b_m \neq 0$	Определена везде, где $b_mx^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_0 \neq 0$
3. $\sqrt[2n]{x}$	$x \in [0, \infty]$
4. $\sqrt[2n-1]{x}$	$(-\infty, \infty)$
5. a^x	$(-\infty, \infty)$
6. $\log_a x$	$x \in [0, \infty]$
7. $\sin x$	$(-\infty, \infty)$
8. $\cos x$	$(-\infty, \infty)$
9. $\mathrm{tg}\, x$	$-\dfrac{\pi}{2} + \pi k < x < \dfrac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$
10. $\mathrm{ctg}\, x$	$0 + \pi k < x < \pi + \pi k, k \in Z$
11. $\arcsin x$	$x \in [-1, 1]$
12. $\arccos x$	$x \in [-1, 1]$
13. $\mathrm{arctg}\, x$	$(-\infty, \infty)$
14. $\mathrm{arcctg}\, x$	$(-\infty, \infty)$

Найти область определения функции.

Пример 2.1

$y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 5x + 4}}$.

Из таблицы 1 следует, что $x^2 - 5x + 4 > 0 \Rightarrow (x-1)(x-4) > 0$. На числовой оси определяем знаки левой части неравенства (рис. 2.1):

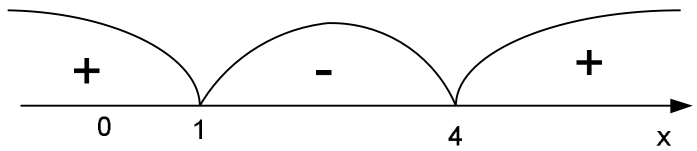

Рис. 2.1

Областью определения является объединение двух множеств: $x \in (-\infty, 1) \bigcup (4, \infty)$

Пример 2.2

$y = \arcsin\dfrac{x+1}{2} + \lg(x+2)$.

Из таблицы 1 следует:

$$\begin{cases} -1 \le \dfrac{x+1}{2} \le 1; \\ x + 2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3 \le x \le 1; \\ x > -2. \end{cases}.$$

Областью определения является пересечение двух множеств: $x \in (-2, 1]$.

Изобразим графически (рис. 2.2):

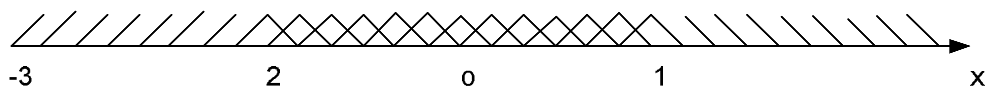

Рис. 2.2

Задание 2.2

Вычислить пределы.

При нахождении пределов функций необходимо широко использовать следующие понятия:

а) 1-й замечательный предел и его следствия:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1,\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin\alpha x}{x} = \alpha,\ \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}\alpha x}{x} = \alpha,\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin\alpha x}{\sin\beta x} = \frac{\alpha}{\beta};$$

б) 2-й замечательный предел и его следствия:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e,\ \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e,\ \lim_{x\to 0}\left(1+\frac{k}{x}\right)^{mx} = e^{km},\ \lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \ln a,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1;$$

в) понятия эквивалентных (или асимптотически равных) бесконечно малых величин и бесконечно больших величин.

Определение. Если $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ - бесконечно малые или бесконечно большие величины при $x\to x_0$ и $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$, то они называются эквивалентными величинам и это обозначается так: $\alpha(x)\cong\beta(x)\sqrt{2}$.

Предел выражения не изменится, если некоторые величины в нем заменить им эквивалентным. Наиболее часто встречаются следующие эквивалентные бесконечно малые величины при $u=u(x)\to 0$:

$\sin u\cong u$; $\operatorname{tg} u\cong u$; $\arcsin u\cong u$; $\operatorname{arctg} u\sim u$; $1-\cos u\sim\dfrac{u^2}{2}$;

$\ln(1+u)\sim u$; $a^u-1\sim u\ln a$; $e^u-1\cong u$; $(1+u)^n-1\cong nu$; $\sqrt[n]{1+u}-1\cong\dfrac{u}{n}$.

Пример 2.3

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(2x^2+x-1)(x+1)}{4x^3+x^2-5}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=\left|\begin{matrix}\text{при } x\to\infty\\ (2x^2+x-1)(x+1)2x^3\\ 4x^3+x^2-5\sim 4x^3\end{matrix}\right|=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3}{4x^3}=\frac{1}{2}.$$

Пример 2.4

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x^2-1}=\left|\frac{0}{0}\right|=\left|\begin{matrix}x^2-3x+2=(x-1)(x-2)\\ x^2-1=(x-1)(x+1)\end{matrix}\right|=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x+1)}=-\frac{1}{2}.$$

Пример 2.5

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2+2}=\left|1^\infty\right|=\lim_{x\to\infty}\left(1+\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}-1\right)\right)^{x^2+2}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x^2-1}\right)^{x^2+2}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{2}{x^2-1}\right)^{\frac{x^2-1}{2}}\right]^{(x^2+2)\cdot\frac{2}{x^2-1}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2(x^2+2)}{(x^2-2)}}=e^2.$$

Пример 2.6

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\ln(1+x^2)}=\left|\frac{0}{0}\right|=\left|\begin{array}{l}\text{при } x\to 0\\ 1-\cos x\sim\dfrac{x^2}{2}\\ \ln(1+x^2)\sim x^2\end{array}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2}}{x^2}=\frac{1}{2}.$$

Пример 2.7

$$\lim_{x\to 2}\frac{e^{(x-2)^2}-1}{\sin^2 3(x-2)}=\left|\frac{0}{0}\right|=\left|\begin{array}{l}\text{при } x\to 2\\ e^{(x-2)^2}-1\sim\left(x-2\right)^2\\ \sin^3 3(x-2)\sim 9(x-2)^2\end{array}\right|=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)^2}{9(x-2)^2}=\frac{1}{9}.$$

Пример 2.8

$$\lim_{x\to 0}\left(1+\sin\frac{x^2}{3}\right)^{\frac{2}{x^2}+1}=\left|1^\infty\right|=\left|\begin{array}{l}\text{при } x\to 0\\ \sin\dfrac{x^2}{3}\sim\dfrac{x^2}{3}\end{array}\right|=\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{x^2}{3}\right)^{\frac{2}{x^2}}\left(1+\frac{x^2}{3}\right)=e^{\frac{2}{3}}.$$

Пример 2.9

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{x^3+x}+\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3+1}-2x}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=\left|\begin{array}{l}\text{при } x\to\infty\\ \sqrt[3]{x^3+x}+\sqrt{x}\sim x\\ \sqrt[4]{x^3+1}-2x\sim -2x\end{array}\right|=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{-2x}=-\frac{1}{2}.$$

Пример 2.10

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-1}\right)=\left|\infty-\infty\right|=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-1}\right)\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x-1}\right)}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-1}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{3}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-1}}=0.$$

Пример 2.11

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4+x}-2}{x}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{4+x}-2\right)\left(\sqrt{4+x}+2\right)}{x\left(\sqrt{4+x}+2\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x\left(\sqrt{4+x}+2\right)}=\frac{1}{4}.$$

Пример 2.12

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{4}{x^2-4}\right)=\left|\infty-\infty\right|=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)}{x^2-4}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)}{(x-2)(x+2)}=\frac{1}{4}.$$

Пример 2.13

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{2x-1}-\frac{x}{2}\right)=\left|\infty-\infty\right|=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-2x^2+x}{2(2x-1)}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{4x}=\frac{1}{4}.$$

Задание 2.3

Исследовать функцию на непрерывность.

Функция $y=f(x)$ является непрерывной в точке x_0, если она определена в некоторой окрестности этой точки и $\lim\limits_{x\to x_0}=f(x)=f(x_0)$. В этом случае существуют лево- и правосторонние пределы:

$$\lim_{x\to x_0-0}f(x)=\lim_{x\to x_0+0}f(x)=f(x_0).$$

Если в точке x_0 существуют левосторонний и правосторонний пределы, но функция не определена в этой точке, то она терпит в точке x_0 разрыв I–го рода. При условии равенства этих пределов x_0 называется точкой устранимого разрыва.

Если в точке x_0 не существует хотя бы один из односторонних пределов, то она называется точкой разрыва II – го рода.

Для исследования функции на непрерывность надо найти левосторонний и правосторонний пределы в точках, где функция не определена.

Пример 2.14

$$y=\frac{1}{x-3}.$$

$$\lim_{x\to 3-0}\frac{1}{x-3}=\left|\begin{matrix}x=3-\alpha\\ \alpha\to 0\end{matrix}\right|=\lim_{\alpha\to 0}\frac{1}{3-\alpha-3}=-\infty;$$

$$\lim_{x\to 3+0}\frac{1}{x-3}=\left|\begin{matrix}x=3+\alpha\\ \alpha\to 0\end{matrix}\right|=\lim_{\alpha\to 0}\frac{1}{3+\alpha-3}=+\infty.$$

Лево- и правосторонний пределы не существуют, значит $x=3$ – точка разрыва II – го рода (см. рис. 2.3).

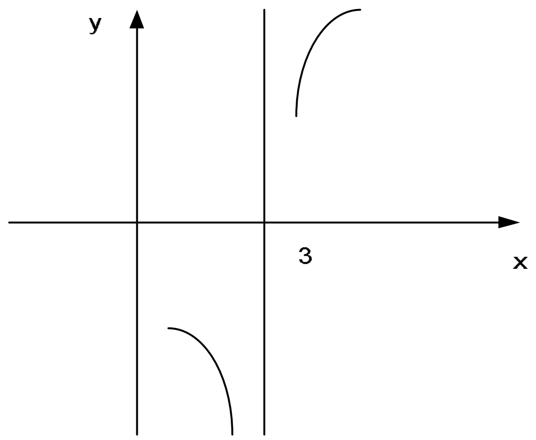

Рис. 2.3

Пример 2.15

$y = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x-1}$.

Рассмотрим точку $x = 1$:

$$\lim_{x\to 1-0} \operatorname{arctg}\frac{1}{x-1} = \begin{vmatrix} x = 1-\alpha \\ \alpha \to 0 \end{vmatrix} = \lim_{\alpha\to 0}\frac{1}{1-\alpha-1} = \operatorname{arctg}(-\infty) = -\frac{\pi}{2};$$

$$\lim_{x\to 1+0} \operatorname{arctg}\frac{1}{x-1} = \begin{vmatrix} x = 1+\alpha \\ \alpha \to 0 \end{vmatrix} = \lim_{\alpha\to 0}\frac{1}{1-\alpha-1} = \operatorname{arctg}(\infty) = \frac{\pi}{2}.$$

Левый и правый пределы существуют, и $x = 1$ является точкой разрыва I – го рода (см. рис. 2.4).

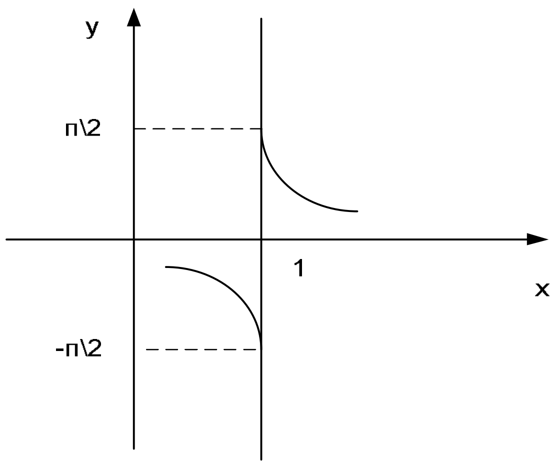

Рис. 2.4

Пример 2.16

$$y = \frac{x-1}{x^2+x-2}.$$

Функция не определена в точках $x_1 = 1$, $x_2 = -2$.

$$\lim_{x\to 1-0} \frac{x-1}{x^2+x-2} = \lim_{x\to 1-0} \frac{x-1}{(x-1)(x+2)} = \frac{1}{3};$$

$$\lim_{x\to 1+0} \frac{x-1}{x^2+x-2} = \lim_{x\to 1+0} \frac{x-1}{(x-1)(x+2)} = \frac{1}{3}.$$

Пределы существуют и равны, значит $x = 1$ – точка устранимого разрыва (см. рис. 2.5).

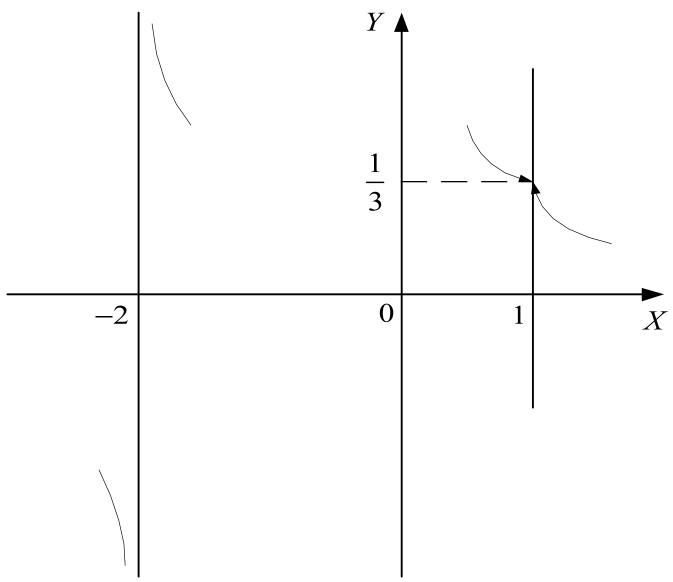

Рис. 2.5

$$\lim_{x\to -2-0} \frac{x-1}{x^2+x-2} = \lim_{x\to -2-0} \frac{x-1}{(x-1)(x+2)} = \begin{vmatrix} x = -2-\alpha \\ \alpha \to 0 \end{vmatrix} = \lim_{\alpha\to 0} \frac{1}{-2-\alpha+2} = -\infty;$$

$$\lim_{x\to -2+0} \frac{x-1}{x^2+x-2} = \lim_{x\to -2+0} \frac{x-1}{(x-1)(x+2)} = \begin{vmatrix} x = -2+\alpha \\ \alpha \to 0 \end{vmatrix} = \lim_{\alpha\to 0} \frac{1}{-2+\alpha+2} = +\infty.$$

Точка $x = 2$ – точка разрыва II – го рода (см. рис. 2.5).

Пример 2.17

$$y=\frac{1}{1+3^{\frac{1}{x-1}}}.$$

Рассмотрим точку $x=1$:

$$\lim_{x\to 1-0}\frac{1}{1+3^{\frac{1}{x-1}}}=\left|\begin{matrix}x=1-\alpha\\ \alpha\to 0\end{matrix}\right|=\lim_{\alpha\to 0}\frac{1}{1+3^{-\frac{1}{\alpha}}}=1;$$

$$\lim_{x\to 1+0}\frac{1}{1+3^{\frac{1}{x-1}}}=\left|\begin{matrix}x=1+\alpha\\ \alpha\to 0\end{matrix}\right|=\lim_{\alpha\to 0}\frac{1}{1+3^{\frac{1}{\alpha}}}=0.$$

Пределы существуют, значит $x=1$ – точка разрыва I – го рода (см. рис. 2.6).

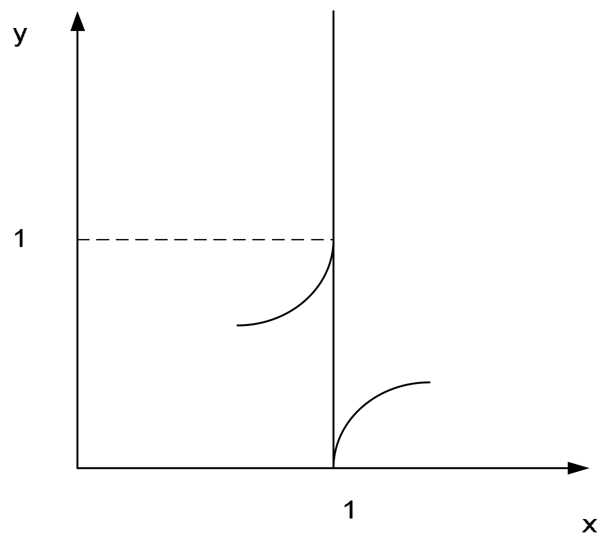

Рис. 2.6

Задание 2.4

Для сравнения бесконечно малых величин необходимо найти предел их отношения. Если $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$

1) равен 0, то $\alpha=0(\beta)$ – бесконечно малая величина более высокого порядка малости, чем β;

2) равен ∞, то $\beta=0(\alpha)$ – бесконечно малая величина более высокого порядка малости, чем α;

3) равен постоянной C, то α и β - бесконечно малые величины одного порядка малости;

4) равен 1, то $\alpha \sim \beta$ – эквивалентные бесконечно малые величины.

Пример 2.18

Сравнить бесконечно малые величины $\alpha(x) = \ln(1+3x)$ и $\beta = \operatorname{tg} x$ при $x \to 0$.

Составляем предел:

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+3x)}{\operatorname{tg} x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{x} = 3$. Следовательно, α и β - бесконечно малые величины одного порядка малости.

Пример 2.19

Сравнить бесконечно малые величины $\alpha = x$ и $\beta = \cos\sqrt{x}$ при $x \to 0$.

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin\sqrt{x}} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{x}} = \infty$. Значит $\beta = 0(\alpha)$.

Пример 2.20

Сравнить бесконечно малые величины $\alpha = \operatorname{arctg}^2\sqrt{x}$ и $\beta = x$ при $x \to 0$.

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}^2\sqrt{x}}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\sqrt{x}\right)^2}{x} = 1$. *Ответ*: $\alpha \sim \beta$.

Контрольные задания по теме "Пределы и непрерывность функции"

Задание 2.1

Найти область определения функции.

1. $y = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$
2. $y = \log_5\dfrac{x-2}{x+6}$
3. $y = \arccos\dfrac{1-2x}{4}$
4. $y = \sqrt{4+x} + \sqrt{3-x}$
5. $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 4x}}$
6. $y = \sqrt{3-x} + \arcsin\dfrac{3-2x}{5}$

7. $y=\sqrt{\lg\left(\frac{5x-x^2}{4}\right)}$

8. $y=\frac{1}{3^{x-2}-1}$

9. $y=\frac{1}{\sqrt{x^2-5x+4}}$

10. $y=\arcsin\frac{x-2}{3}$

11. $y=\sqrt{x}+\ln(2x-3)$

12. $y=\sqrt{x+1}-\sqrt[4]{2x-1}$

13. $y=\lg\sin x$

14. $y=\arcsin\frac{x-3}{2}-\lg(4-x)$

15. $y=\frac{3}{4-x^2}+\lg(x^3-x)$

16. $y=\frac{x}{\sqrt{x^2-3x+2}}$

17. $y=\sqrt{16-x^2}+\log_5(x^2-9)$

18. $y=\sqrt{\frac{x-2}{x+2}}+\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$

19. $y=\sqrt{x}+\lg(2x-3)$

20. $y=\frac{1}{\lg(1-x)}+\sqrt{x+2}$

21. $y=\frac{1}{\sqrt{2+x-x^2}}$

22. $y=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x^2-5x+6}}$

23. $y=\arccos(x-1)+\frac{1}{x-2}$

24. $y=\lg(5x-x^2-6)$

25. $y=\sqrt{x-1}+2\sqrt{1-x}$

26. $y=\arcsin\sqrt{\frac{1-x^2}{2}}$

27. $y=\lg\frac{x-5}{x^2-10x+24}$

28. $y=\sqrt{4-x}+\arcsin\frac{2-x}{3x}$

29. $y=\sqrt{2-x-x^2}+\frac{1}{2^{x-2}-1}$

30. $y=\arccos\frac{5}{x}+\frac{1}{\sqrt{6-x}}$

Задание 2.2

Найти пределы.

1. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x(x+3)^2}{(2x+1)^3}$; б) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2+x-2}{x^2-4x+3}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2}{x^2+1}\right)^{x^2+2}$

г) $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)$

2. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-3x^2+5}{x(x-2)^2}$; б) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2+3x-10}$; в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos 2x}{3x^2}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3+x}-x}$

3. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x+5)^4}{(x^2+1)^2}$; б) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+2x-3}$; в) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sin(x-1)}{x^2-1}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)$

4. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^5-2x^3+7x}{x^3(3x^2-x+1)}$; б) $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x^2+5x+6}{x^2+4x+3}$; в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x)}{tg^2\sqrt{x}}$; г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$

5. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(1-2x)^3x^2}{3x^5-4x^3+1}$; б) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{x^3-1}$; в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x^2}-1}{3x^2}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{x^2+1}-x\right)$

6. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x^2+3)^2}{3x^2-2x^2+1}$; б) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^2-2x-8}{x^2+x-2}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x+1}\right)^{x-3}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt[3]{x^2+1}}{\sqrt[4]{x^4+1}-\sqrt[5]{x^4+1}}$

7. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(3x^2+x)^2}{x(x^3-1)}$; б) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{x^2+x-2}$; в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\mathrm{tg}^2\,3x}{\sin x^2}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$

8. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x(2x-1)(3x^2+1)}{(x^2-1)(5x^2+x-1)}$; б) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-8}{x^2-3x+2}$; в) $\lim\limits_{x\to0}\left(1+tg\sqrt{x}\right)^{\frac{2}{x}}$;

г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x^2}$

9. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x+1)^3}{x(3x+5)^2}$; б) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-2x-3}{x^2+2x-15}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^2}{2x^2+5}\right)^{x^2}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{2x^2-1}-\dfrac{x^2}{2x+1}\right)$

10. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x^2+1)^3}{(3x^3+x^2+x)^2}$; б) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-x-6}{x^2-9}$; в) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{e^{x-2}-1}{x^2-4}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[5]{x^7+3}+\sqrt[4]{2x^3-1}}{\sqrt[6]{x^8+x^7+1}-x}$

11. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^4-8x^3+x-1}{(2x^2+x+1)^2}$; б) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3+1}{x^2-2x-3}$; в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{tg^2 2x}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{(x+1)(x+2)}-x\right)$

12. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x(x^2-5x+8)}{(x^3-1)^2}$; б) $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x^2+2x-3}{x^2+8x+15}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\sin^2\sqrt{x})}{x}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}$

13. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(3x+1)^2(x^2+1)}{x(x^3-2x+5)}$; б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-4x+3}{x^3-27}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin^2 3x)^{\frac{1}{2x^2}}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{x-1}-x\right)$

14. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x+1)^3(x^2+2)}{x(3x^2+x)^2}$; б) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2-4x-5}{x^2+3x+2}$; в) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\mathrm{tg}(x-2)}{x^2-x-2}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^4+3}-\sqrt[5]{x^3+4}}{\sqrt[3]{x^7+1}}$

15. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^5+8x^3+9}{x^4+x-7}$; б) $\lim\limits_{x\to-5}\dfrac{x^2+2x-15}{x^2+7x+10}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-4x+2}\right)^x$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-2x-1}-\sqrt{x^2-7x+3}\right)$

16. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x+5)^5}{x^2(3x^3-2x+8)}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-1}{x^3-1}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{3x}$; г) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$

17. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^6-x^2-x}{(x^3+x-1)^2}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-2x-8}{x^4-x^3-6x^2}$; в) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)\mathrm{tg}\,x$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{2x+3}-\dfrac{x^2-1}{2}\right)$

18. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(4x+3)^2(x^3+1)}{3x^2(x^3-1)}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-16}{x^2-2x-8}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x^2)^{ctg^2 x}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^5+1}+\sqrt[5]{x}}{\sqrt[7]{x^9+7}+\sqrt{x+3}}$

19. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^7-x^6+5x^4-2}{5x^5(3x-1)^2}$; б) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2+3x-4}{x^3+6x^2+8x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{1-e^{2x}}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x+3}\right)$

20. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x^2-1)(7x^5+x^2-1)}{x(5x^3-1)^2}$; б) $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{x^2-3x-10}{x^2-6x+5}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-1}{3x+2}\right)^{x-4}$;

г) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$

21. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3(4x^2+x)^2}{x(3x^3+x^2-1)^2}$; б) $\lim\limits_{x\to-4}\dfrac{x^2+5x+4}{x^2+2x-8}$; в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{tg^2\sqrt{x}}{\ln(1+3x)}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{3x^2-1}-\dfrac{x^2}{3x+1}\right)$

22. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^5-4x^2+3}{(x^2+3x)(2x+1)^3}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-3x^2+2x}{x^2+X-2}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x^2+4x-1}{3x^2-5x+2}\right)^{\frac{x^2}{x+3}}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^2+1}-\sqrt{x}}{\sqrt{x^3+4}+\sqrt{x}}$

23. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+5)^6}{3x^2(4x^2-x)^2}$; б) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-8x+7}{x^2+2x-3}$; в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 5x}{e^{2x}-1}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-3x-2}-\sqrt{x^2+3x-1}\right)$;

24. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(5x-2)(x^2+x)^2}{x^5-5x+2}$; б) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-4x}{x^2+5x-14}$; в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{e^{x^2}-1}$;

г) $\lim\limits_{x\to10}\dfrac{\sqrt{x-1}-3}{x-10}$

25. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x^2-x)(3x^2+2)^2}{(2x^3+1)(4x^3-1)}$; б) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^3-2x^2-8x}{x^2+3x+2}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}(1+2x^2)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2-2x+5}\right)$

26. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2(x^3+5)}{(4x^2-1)^3}$; б) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-4}{x^2+3x-10}$; в) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sin(x-3)}{x^2-4x+3}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+\sqrt{x^5+3x+1}}{\sqrt[3]{x^7+6}}$

27. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2-5x)^3}{(3x+1)(5x+8)^2}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-x-6}{x^2+2x-15}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x}{2x-3}\right)^{3x}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+3}-\sqrt{x^2+9}\right)$

28. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(3x+2)^3(x+1)}{(2x+3)^2(x-4)}$; б) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^4-1}{x^3+1}$; в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1-3x)}{tg^2\sqrt{2x}}$; г) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{x-3}-1}{16-x^2}$

29. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x(5x+1)(2x^3+x)}{(3x-1)^3(2x^2-7)}$; б) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^2-4}{x^3-8}$; в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{4x\sin2x}{1-\cos2x}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2-3x}\right)$

30. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2(3x^3+5x-8)^2}{(2x^4+1)(3x^4-x^2+1)}$; б) $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x^2+4x+3}{x^2+x-6}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2}\right)^{2x^2+1}$;

г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$

Задание 2.3

Исследовать функцию на непрерывность и изобразить схематически ее график в окрестности точек разрыва.

1. $y=\dfrac{x^2+x}{x+1}$; 2. $y=\dfrac{1}{1-2^{\frac{1}{x-1}}}$; 3. $y=4^{\frac{1}{x-2}}$; 4. $y=\dfrac{x}{x^3+1}$; 5. $y=\dfrac{x}{x^3+1}$;

6. $y=\dfrac{x}{4x^2-1}$; 7. $y=\dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}$; 8. $y=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x-3}$; 9. $y=\dfrac{(x-1)}{x^2-2x-3}$;

10. $y=\dfrac{3}{x^3-8}$; 11. $y=\dfrac{1}{1-5^{(x-1)}}$; 12. $y=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\frac{1}{x+1}}$; 13. $y=\operatorname{arctg}\dfrac{2}{x-1}$;

14. $y=\dfrac{2x}{x^3+8}$; 15. $y=\dfrac{1}{1+3^{\frac{1}{x+2}}}$; 16. $y=\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-x-6}}$; 17. $y=\dfrac{3x-1}{x^3+27}$;

18. $y=\dfrac{(x+2)}{x^2+x-2}$; 19. $y=\operatorname{arctg}\dfrac{4}{x-5}$; 20. $y=\dfrac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1}$; 21. $y=\left(\dfrac{1}{4}\right)^{\frac{1}{x-1}}$;

22. $y=2^{\frac{1}{x^2-3x+2}}$; 23. $y=3^{\frac{1}{x^2-1}}$; 24. $y=\dfrac{x^2+1}{x^3-27}$; 25. $y=\operatorname{arctg}\dfrac{2}{x-6}$;

26. $y=\dfrac{1}{\ln(x-2)}$; 27. $y=\dfrac{1}{1-2^{x}}$; 28. $y=\dfrac{x-1}{x^2+x-2}$; 29. $y=\operatorname{arctg}\dfrac{x+1}{x^2+x}$;

30. $y=\dfrac{x+1}{2-2^{\frac{1}{x}}}$.

Задание 2.4

Сравнить бесконечно малые величины.

1. $\sin 3x$ и x при $x\to 0$
2. $\sqrt[3]{x^2}$ и $\sqrt{x^3}$ при $x\to 0$
3. $\operatorname{tg}\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)$ и $(2x-\pi)$ при $x\to\dfrac{\pi}{2}$
4. $(1-\cos 2x)$ и x^2 при $x\to 0$
5. $\operatorname{tg}2x$ и $\sin 3x$ при $x\to 0$
6. $\ln(1+x^2)$ и x^3 при $x\to 0$
7. $\arcsin 3x$ и x при $x\to 0$
8. $\ln x$ и $(1-x)$ при $x\to 1$
9. $\sin^2\sqrt{x}$ и x при $x\to 0$
10. $\left(e^{2x}-1\right)$ и $\sin 2x$ при $x\to 0$
11. $\ln(1+3x)$ и $tg2x$ при $x\to 0$
12. $(1-\cos x)$ и $\left(e^{x^2}-1\right)$ при $x\to 0$
13. $\left(\operatorname{tg}\sqrt{x}\right)^3$ и $\sqrt{x^3}$ при $x\to 0$
14. $\operatorname{arctg}(x-2)$ и $\left(x^2-4\right)$ при $x\to 2$
15. $\sin 2x$ и $\ln(1+x^2)$ при $x\to 0$
16. $(1-\cos x)^2$ и x^3 при $x\to 0$
17. $\sin x^2$ и tg^2x при $x\to 0$
18. $\left(3^x-1\right)$ и $3x$ при $x\to 0$
19. $\arcsin\sqrt{x}$ и $\sqrt{\sin x}$ при $x\to 0$
20. $\ln(1+4x^2)$ и tg^2x при $x\to 0$
21. $\sin\sqrt[3]{x}$ и $\left(e^{5\sqrt[3]{x}}-1\right)$ при $x\to 0$
22. $(x-1)$ и $\ln(2-x)$ при $x\to 1$
23. $(1-\cos x)$ и $\left(e^{\frac{x^2}{2}}-1\right)$ при $x\to 0$
24. $(\operatorname{arctg}\sqrt[3]{x})^2$ и $\sqrt[3]{x^2}$ при $x\to 0$
25. $\left(2^x-2\right)$ и $\sin(x-1)$ при $x\to 1$
26. $\operatorname{tg}^3 x$ и $\left(e^{3x}-1\right)$ при $x\to 0$
27. x^5 и $2\sin^5 x$ при $x\to 0$
28. $\ln(1+2x^2)$ и $tg^2 3x$ при $x\to 0$
29. $\arcsin^2\sqrt{x}$ и $2x$ при $x\to 0$
30. $(1-\cos 2\sqrt{x})^3$ и x^3 при $x\to 0$

Раздел 3
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Перед выполнением контрольных заданий по этой теме необходимо изучить теоретический материал по учебникам: [1] (гл.III пар.1, 2, 3(п.47), 4, 5; гл.IV пар. 1, 2, 3); [2] (гл.VI пар. 1-7).

Контрольные вопросы

1. Производная. Геометрический смысл.
2. Дифференцирование суммы, произведения и частного двух функций.
3. Производные основных элементарных функций.
4. Производная сложной и обратной функции.
5. Производная функции, заданной в параметрической форме.
6. Дифференциал, геометрический смысл, свойства.
7. Производные высших порядков.
8. Уравнения касательной и нормали к плоской кривой.
9. Монотонность функции. Необходимый и достаточный признаки монотонности.
10. Экстремум функции. Необходимый и достаточный признаки экстремума функции.
11. Наименьшие и наибольшие значения функции на отрезке.
12. Выпуклость и вогнутость графика функции. Точки перегиба. Асимптоты.
13. Общий план исследования функции.

Рассмотрим типичные задачи по этой теме.

Задание 3.1

Найти производную заданной функции.

При дифференцировании функции необходимо руководствоваться приведенными ниже правилами.

а) Таблица производных основных элементарных функций:

1. $(x^n)' = nx^{n-1}$

2. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}, \ \ (x > 0)$

3. $(a^x)' = a^x \ln a$

4. $(e^x)' = e^x$

5. $(\sin x)' = \cos x$

6. $(\cos x)' = -\sin x$

7. $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

8. $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$

9. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \ |x| < 1$

10. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \ |x| < 1$

11. $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$

12. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

13. $(\operatorname{sh} x)' = chx$

14. $(\operatorname{ch} x)' = shx$

б) Правила дифференцирования (здесь C – постоянная; $u = u(x)$, $v = v(x)$ – дифференцируемые функции):

1. $(c)' = 0$; 2. $(cu)' = cu'$; 3. $(u \pm v)' = u' \pm v'$; 4. $(uv)' = u'v + v'u$;

5. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$; 6. если $y = y(u)$, $u = u(x)$, то $y' = y'_u \cdot u'_x$;

7. *если* $y = y(x)$, $x = x(y)$, то $y'_x = \dfrac{1}{x'_y}$; 8. если $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, то $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t}$.

<u>Пример 3.1</u>

$$y = \ln\sin^3\sqrt{\operatorname{arctg} e^{3x}}.$$

$$y' = (\ln\sin\sqrt[3]{\operatorname{arctg} e^{3x}})' = \frac{1}{\sin\sqrt[3]{\operatorname{arctg} e^{3x}}} \cdot (\sin\sqrt[3]{\operatorname{arctg} e^{3x}})' =$$

$$= \frac{1}{\sin\sqrt[3]{\operatorname{arctg} e^{3x}}} \cdot \cos\sqrt[3]{\operatorname{arctg} e^{3x}} \cdot (\sqrt[3]{\operatorname{arctg} e^{3x}})' =$$

$$= \frac{\cos\sqrt[3]{\operatorname{arctg} e^{3x}}}{\sin\sqrt[3]{\operatorname{arctg} e^{3x}}} \cdot \frac{1}{3}(\operatorname{arctg} e^{3x})^{-\frac{2}{3}}(\operatorname{arctg} e^{3x})' =$$

$$= \operatorname{ctg}\sqrt[3]{\operatorname{arctg} e^{3x}} \, \frac{1}{3\sqrt[3]{\operatorname{arctg}^2 e^{3x}}} \cdot \frac{1}{1+e^{6x}} \cdot (e^{3x})' =$$

$$= \operatorname{ctg}\sqrt[3]{\operatorname{arctg} e^{3x}} \cdot \frac{1}{3\sqrt[3]{\operatorname{arctg}^2 3x}} \cdot \frac{1}{1+e^{6x}} \cdot e^{3x}(3x)' =$$

$$= \operatorname{ctg}\sqrt[3]{\operatorname{arctg} e^{3x}} \cdot \frac{1}{3\sqrt[3]{\operatorname{arctg}^2 3x}} \cdot \frac{e^{3x}}{1+e^{6x}} \cdot 3.$$

Пример решен очень подробно для демонстрации правил дифференцирования. Желательно сократить все промежуточные вычисления, тогда решение будет иметь вид:

$$y' = (\ln\sin\sqrt[3]{\operatorname{arctg} e^{3x}})' = \frac{1}{\sin\sqrt[3]{\operatorname{arctg} e^{3x}}}\cos\sqrt[3]{\operatorname{arctg} e^{3x}}\,\frac{1}{3}(\operatorname{arctg} e^{3x})\frac{1}{1+e^{6x}}e^{3x}3.$$

<u>Задание 3.2</u>

Найти производные y'_x и y''_x для функции, заданной в параметрической форме.

Пусть $\begin{cases} x = x(t); \\ y = y(t) \end{cases}$ – параметрически заданная функция. Тогда $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t}$ (*).

Обозначим $y'_x = y'_x(t)$ и рассмотрим следующую параметрически заданную функцию: $\begin{cases} x = x(t); \\ y'_x = y'_x(t). \end{cases}$ Для вычисления ее производной применяется правило (*): $y''_x = \dfrac{(y'_x)'_t}{x'_t}$.

Повторяя его многократно, можно найти производную любого порядка, если она существует.

<u>Пример 3.2</u>

$$\begin{cases} x = \operatorname{arctg} t; \\ y = \ln(1+t^2). \end{cases}$$

$$y'_x = \frac{(\ln(1+t^2))'}{(arctgt)'} = \frac{\dfrac{2t}{1+t^2}}{\dfrac{1}{1+t^2}} = 2t.$$

Рассмотрим функцию $\begin{cases} x = arctgt; \\ y'_x = 2t. \end{cases}$ По формуле (*) находим:

$$y''_x = \frac{(2t)'}{(arctgt)'} = \frac{2}{\frac{1}{1+t^2}} = 2(1+t^2).$$

Задание 3.3

Составить уравнение касательной и нормали к графику функции.

Пусть $y = f(x)$ – некоторая кривая и $M_0(x_0, y_0)$ – точка на ее графике. Тогда

$$\begin{aligned} &y - y_0 = f'(x)(x - x_0); \\ &y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) \end{aligned} \quad (**)$$

– уравнения касательной и нормали, соответственно, к графику этой функции в точке M_0.

Пример 3.3

Составить уравнения касательной и нормали к кривой $y = x^2 + 2x + 3$ в точке с абсциссой $x_0 = 1$.

Найдем $y_0 = 6$;

$y' = 2x + 2 \Rightarrow y'(x_0) = 4;$

$y - 6 = 4(x - 1) \Rightarrow 4x - y + 2 = 0$ – уравнение касательной;

$y - 6 = -\frac{1}{4}(x - 1) \Rightarrow x + 4y - 25 = 0$ – уравнение нормали.

Пример 3.4

$\begin{cases} x = t^3 + 3t + 1; \\ y = t^3 - 3t + 1 \end{cases}$ при $x_0 = 1$.

Прежде всего, найдем t_0, при котором $x = x_0 = 1$:

$1 = t^3 + 3t + 1 \Rightarrow t^3 + 3t = 0 \Rightarrow t(t^2 + 3) = 0 \Rightarrow t_0 = 0$.

Тогда $y_0 = 1$

$y'_x = \frac{3t^2 + 3}{3t^2 - 3} \Rightarrow y'_x(x_0) = -1;$

$y - 1 = -1(x - 1) \Rightarrow x + y - 2 = 0$ – уравнение касательной;

$$y-1=(x-1)\Rightarrow x+y=0$$ – уравнение нормали.

Задание 3.4

Исследовать функцию и построить ее график.

При этом нужно руководствоваться общим планом исследования функции.

1. Найти область определения и точки разрыва функции.
2. Найти точки пересечения графика функции с осями координат.
3. Найти интервалы монотонности и экстремумы.
4. Найти интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегиба.
5. Найти асимптоты.

При построении графика функции необходимо учесть ее четность, периодичность, если таковые свойства имеются.

Пример 3.5

Исследовать функцию $y=\dfrac{x^2-2x+2}{x-1}$.

1. Область определения: $x\in(-\infty,1)\bigcup(1,\infty)$.

При $x=1$ функция не определена. Найдем левый и правый пределы в этой точке:

$$\lim_{x\to 1-0}\frac{x^2-2x+2}{x-1}=\left|\begin{matrix}x=1+\alpha\\ \alpha\to 0\end{matrix}\right|=\lim_{\alpha\to 0}\frac{1}{-\alpha}=-\infty;$$

$$\lim_{x\to 1+0}\frac{x^2-2x+2}{x-1}=\left|\begin{matrix}x=1+\alpha\\ \alpha\to 0\end{matrix}\right|=\lim_{\alpha\to 0}\frac{1}{2}=+\infty.$$

Следовательно, $x=1$ – точка разрыва II – го рода.

2. Найдем точки пересечения с осями координат.

При $x=0$ $y=-2$. Ось x функция не пересекает, т.к. $y\neq 0$ ни при каких x.

3. Найдем интервалы монотонности и экстремумы.

$y'=\dfrac{x(x-2)}{(x-1)^2}$; при $y'=0$ получаем $\dfrac{x(x-2)}{(x-1)^2}=0$.

Отсюда критические точки: $x_1=0,\ x_2=1,\ x_3=2.$

Построим таблицу 3.1.

Таблица 3.1

x	$-\infty, 0$	0	0,1	1	1,2	2	2, ∞
y'	+	0	–	не сущ.	–	0	+
y	$\nearrow$	max	$\searrow$	не сущ.	$\searrow$	min	$\nearrow$

Итак, точка $x_1 = 0$ – точка максимума, $y(0) = -2$; $x_3 = 2$ – точка минимума, $y(2) = 2$.

4. Найдем интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегиба.

$$y'' = \frac{2}{(x-1)^3}.$$

Критическая точка $x = 1$, но перегиба в ней нет, так как функция в этой точке не существует.

Построим таблицу 3.2.

Таблица 3.2

x	$-\infty, 1$	1	$1, \infty$
y''	–	не сущ.	+
y	$\cap$	не сущ.	$\cup$

5. Найдем асимптоты функции.

Из пункта 1 следует, что прямая $x = 1$ – вертикальная асимптота. Рассмотрим наличие наклонных асимптот:

$$y = kx + b\text{, где } k = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x},\ b = \lim_{x\to\infty}[f(x) - kx].$$

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2 - 2x + 2}{x(x-1)} = 1,\ b = \lim_{x\to\infty}[\frac{x^2 - 2x + 2}{x-1}] = -1.$$

Наклонная асимптота существует и ее уравнение $y = x - 1$.

Исследуемая функция общего характера, не периодическая, нет ни оси, ни центра симметрии.

По полученным результатам строим эскиз графика функции (см. рис. 3.1).

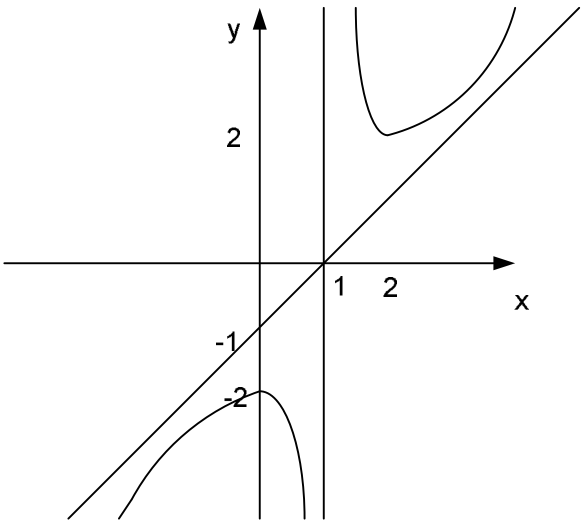

Рис. 3.1

<u>Задание 3.5</u>

Найти наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке.

Эти значения непрерывная функция может принять либо в точках экстремума, либо на концах отрезка.

<u>Пример 3.6</u>

$y = x^3 - 3x,\ x \in [-\frac{3}{2}, \frac{5}{2}].$

Находим критические точки:

$y' = 3x^2 - 3 \Rightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x_1 = -1,\ x_2 = 1.$

Вычисляем значения функции в критических точках и на концах отрезка:

$y(-\frac{3}{2}) = \frac{9}{8},\ y(\frac{5}{2}) = \frac{65}{8},\ y(-1) = 2,\ y(1) = -2.$

Сравнивая, их определяем:

$y_{наиб.} = \frac{8}{65}$ при $x = \frac{5}{2}$; $y_{\text{наим.}} = -2$ при $x = 1$.

Контрольные задания по теме "Дифференциальное исчисление функции одной переменной"

<u>Задание 3.1</u>

Найти производные данных функций.

1. а) $y=3^{\sin 3x}+\sqrt{x^3-3x^2+5}$; б) $y=\left(\arcsin\frac{1}{x}\right)\cdot\ln\left(x^2+1\right)$;

в) $y=\frac{\sqrt{4x^5+2}}{3x^4}$

2. а) $y=\sqrt[3]{x^2+x}+\operatorname{arctg}2x$; б) $y=e^{x^2+1}\cdot\cos^3 4x$; в) $y=\frac{\log_3\left(x^3+1\right)}{\sqrt{x}}$

3. а) $y=\frac{1}{4}\operatorname{tg}^4 2x+\arccos\sqrt{x}$; б) $y=\sqrt[3]{\left(x^2+5x-1\right)^2}\cdot\ln\left(x^5+x\right)$;

в) $y=\frac{x^2}{\sqrt{x^2+a^2}}$

4. а) $y=\sqrt[5]{x^3+4}+e^{-\sin^3 2x}$; б) $y=\left(\cos 3x\right)\cdot 4^{x^3-x}$; в) $y=\frac{\arcsin\frac{1}{x^2}}{\ln 4x}$

5. а) $y=\left(\sin\frac{1}{x^2}\right)+\arccos\left(1-x^2\right)$; б) $y=5^{\sqrt{x^3}}\cdot\operatorname{tg}^2 e^x$; в) $y=\frac{1+x^2}{\sqrt{1-x^3}}$

6. а) $y=\left(\cos\sqrt{x}\right)+e^{-\operatorname{tg}^2 x}$; б) $y=\left(\operatorname{arctg}3x\right)\cdot\ln\left(3x-x^2\right)$; в) $y=\frac{1-\sqrt[3]{2x}}{1+\sqrt[3]{2x}}$

7. а) $y=e^{\sin\frac{1}{x}}-\log_3\left(1+x^2\right)$; б) $y=x^2\operatorname{tg}^3 2x$; в) $y=\frac{\arccos x^2}{2^{3x}}$

8. а) $y=\ln\cos x+\sqrt[4]{x^5+x^2-1}$; б) $y=\left(\arcsin x^2\right)\cdot e^{-x^2+1}$; в) $y=\frac{\sin 2x-x}{x^3}$

9. а) $y=\arccos x^3+\sqrt[3]{1-x+x^3}$; б) $y=\left(\cos\sqrt[3]{x}\right)\cdot\ln\left(3x+2\right)$; в) $y=\frac{4^{-5x}}{\sqrt{1+x^4}}$

10. а) $y=\operatorname{arctg}\sqrt{x}+e^{\operatorname{tg}2x}$; б) $y=\left(5x^3+x^2+1\right)^{10}\cdot\sin\sqrt[3]{x}$; в) $y=\frac{\ln\left(x^3+x^2+1\right)}{x^2}$

11. а) $y=\ln\sin 3x+\sqrt[4]{x^3+1}$; б) $y=\left(x^2+x\right)^5\cdot\arcsin\frac{1}{x}$; в) $y=\frac{\operatorname{tg}^3 4x}{\sqrt{x}}$

12. а) $y=\sqrt[4]{\left(x^3+x-1\right)^3}+3^{\cos^2 3x}$; б) $y=\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{x^2}\right)\cdot\ln\left(3x-1\right)$; в) $y=\frac{e^{1-x^3}}{\sqrt[3]{x^2}}$

13. а) $y=\arccos\frac{1}{x^3}+\left(x^3-x\right)^6$; б) $y=e^{2x^3-1}\cdot\operatorname{tg}^3 2x$; в) $y=\frac{\ln\left(x^2+2x\right)}{\cos^4 3x}$

14. а) $y=3^{2-x^3}+\mathrm{tg}^3\dfrac{1}{x}$; б) $y=\sqrt{1-x^3}\cdot\log_3\left(1+x^2\right)$; в) $y=\dfrac{\arcsin\sqrt[3]{x}}{1+x^3}$

15. а) $y=\mathrm{arctg}\dfrac{1}{x^3}+\left(x^3-x^2+3\right)^4$; б) $y=\sqrt[5]{x^3}\cdot\sin^2\dfrac{1}{x}$; в) $y=\dfrac{x^2+3}{\ln\left(x^2-1\right)}$

16. а) $y=\arccos(2x+1)-e^{-\sqrt[3]{x^2}}$; б) $y=(\sin 5x)\cdot\log_5\left(x^2+3\right)$; в) $y=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$

17. а) $y=\sqrt{1+\mathrm{tg}^2 3x}+2^{1+x^2-x^3}$; б) $y=\left(\cos^2\dfrac{x}{2}\right)\cdot\log_2(2x+5)$; в) $y=\dfrac{\arcsin x^3}{\sqrt{1-x^6}}$

18. а) $y=\sqrt[5]{\left(3-x^2\right)^3}-\mathrm{arctg}\sqrt{x}$; б) $y=\left(\sin^3\dfrac{1}{x^2}\right)\cdot e^{1-x^4}$; в) $y=\dfrac{x^5}{\sqrt{2x^2-x}}$

19. а) $y=\mathrm{tg}^3\sqrt{x}-3^{x^3+2x+5}$; б) $y=\left(1+x^2-x^3\right)^{10}\cdot\ln\left(1+x^4\right)$; в) $y=\dfrac{x^3-2}{\arcsin x}$

20. а) $y=\arccos^2 x^3+\left(\sqrt[3]{x}+2x\right)^5$; б) $y=\log_3\left(x^2+x+1\right)\cdot\cos^2 4x$;

в) $y=\dfrac{1-x^2+x^3}{1+x^4}$

21. а) $y=\mathrm{arctg}\dfrac{2}{x}+3^{\sqrt{x^2+x}}$; б) $y=\left(x^3+x^2\right)^6\cdot\cos\dfrac{5}{x}$; в) $y=\dfrac{\ln\left(\sqrt{x}+1\right)}{x^5}$

22. а) $y=\arcsin\sqrt{1-x^2}-4^{\sqrt{x}}$; б) $y=\left(\mathrm{tg}^3\dfrac{1}{x}\right)\cdot\left(1+x^2\right)^5$; в) $y=\dfrac{\ln(2x+1)}{x^2+x}$

23. а) $y=\log_3\dfrac{1}{x^2-4}+\sqrt[3]{2-3x^2}$; б) $y=\left(\arccos x^2\right)\cdot e^{\sin 2x}$; в) $y=\left(\dfrac{1+x^2}{1+x^3}\right)^4$

24. а) $y=\mathrm{arctg}\,3x+e^{\sqrt{1-x^3}}$; б) $y=\left(\cos\dfrac{1}{x^3}\right)\cdot\ln(3x-1)$; в) $y=\dfrac{\sqrt[3]{x^2}+1}{\sqrt[4]{x^3}-1}$

25. а) $y=\sin^3 5x+e^{-\frac{1}{x^2}}$; б) $y=\sqrt[5]{x^3+x}\cdot\log_3\left(x^3-1\right)$; в) $y=\dfrac{\arcsin x^3}{x^3}$

26. а) $y=\ln(\sin 2x)+\mathrm{arctg}\dfrac{1}{x^3}$; б) $y=e^{2x+3}\left(x^{2-x+1}\right)$; в) $y=\dfrac{2\sin^2 3x}{\cos 2x}$

27. а) $y=\sqrt{x^2+1}-\ln\left(1+\sqrt{1+x^2}\right)$; б) $y=e^{-x^2}\cdot\arccos\dfrac{1}{\sqrt{x}}$; в) $y=\dfrac{\cos^2 2x}{1+\mathrm{tg}\,2x}$

28. а) $y=\sin^2\frac{1}{x}+\arcsin^3\sqrt{x}$; б) $y=\left(x^3+x^2\right)^4\ln\left(x^4+2\right)$; в) $y=\frac{\left(3-x^2\right)^4}{\left(x^3+1\right)^5}$

29. а) $y=\operatorname{arctg}^2 x^3-\sqrt{2+4x-x^2}$; б) $y=\left(\cos^3\frac{1}{x}\right)\cdot e^{\operatorname{tg}x}$; в) $y=\frac{\ln(4x+3)}{2x^2+3}$

30. а) $y=\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)-\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$; б) $y=(\arccos 4x)\cdot 4^{\sqrt{x^2+1}}$;

в) $y=\frac{\operatorname{tg}^2 2x}{1+\sin^2 2x}$

Задание 3.2

Найти производные y'_x и y''_x от данных функций.

1. $x=a\cos t;\ y=b\sin t$
2. $x=a\cos^3 t;\ y=b\sin^3 t$
3. $x=a(t-\sin t);\ y=a(1-\cos t)$
4. $x=1-t^2;\ y=t-t^3$
5. $x=\frac{t+1}{t};\ y=\frac{t-1}{t}$
6. $x=\ln\left(1+t^2\right);\ y=t-\operatorname{arctg}t$
7. $x=t(1-\sin t);\ y=t\cos t$
8. $x=\frac{1+t^3}{t^2-1};\ y=\frac{1}{t^2-1}$
9. $x=e^t\sin t;\ y=e^t\cos t$
10. $x=\frac{3t}{1+t^3};\ y=\frac{3t^2}{1+t^3}$
11. $x=t-t^4;\ y=t^2-t^3$
12. $x=t^3+1;\ y=t^2+t+1$
13. $x=\arccos t;\ y=\ln\left(1-t^2\right)$
14. $x=2e^t;\ y=e^{-t}$
15. $x=\sin t;\ y=\cos 2t$
16. $x=at^2;\ y=bt^3$
17. $x=2\ln c\operatorname{tg}t+1;\ y=\operatorname{tg}t+c\operatorname{tg}t$
18. $x=\cos t;\ y=\ln\cos t$
19. $x=\frac{3t}{1+t^2};\ y=\frac{3t^2}{1+t^3}$
20. $x=e^{\sqrt{t}};\ y=\sqrt{t}$
21. $x=\cos t;\ y=c\operatorname{tg}t$
22. $x=\cos t+t\sin t;\ y=\sin t-t\cos t$
23. $x=\sin t;\ y=\cos^2 t$
24. $x=\frac{t}{1+t^2};\ y=\frac{1-t}{1+t^2}$
25. $x=\ln t;\ y=\frac{1}{t}$
26. $x=\sin^2 t;\ y=\cos^2 t$
27. $x=\cos t;\ y=\sin^3 t$
28. $x=\sin t;\ y=\operatorname{tg}t$

29. $x = \ln t;\ y = t^2 + 1$

30. $x = t^3 + 2t;\ y = t^2 + 1$

Задание 3.3

Составить уравнения касательной и нормали к кривой в точке с абсциссой x_0.

1. $y = \dfrac{1}{x};\ x_0 = -\dfrac{1}{2}$

2. $x = t - t^4;\ y = t^2 + t^3;\ x_0 = 0$

3. $y = x^2 (x-2)^2;\ x_0 = 1$

4. $x = 3\cos t;\ y = 4\sin t;\ x_0 = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

5. $y = x^5 + 5x + 12;\ x_0 = -1$

6. $x = t^3 + 1;\ y = t^2 + t + 1;\ x_0 = 1$

7. $y = x^3 + x - 2;\ x_0 = -1$

8. $x = 2\cos t;\ y = \sin t;\ x_0 = 1$

9. $y = x^3 + 3x^2 - 2;\ x_0 = 1$

10. $x = 8\cos^3 t;\ y = \sin^3 t;\ x_0 = 1$

11. $y = \sin x;\ x_0 = \dfrac{\pi}{3}$

12. $x = 3t^2 - t;\ y = 2t^3 + t^2;\ x_0 = 2$

13. $y = \ln x;\ x_0 = 1$

14. $x = \dfrac{t^2}{1+t^2};\ y = \dfrac{t}{1+t^2};\ x_0 = \dfrac{1}{2}$

15. $y = \dfrac{8a^3}{4a^2 + x^2};\ x_0 = 2a$

16. $x = 2e^t;\ y = e^{-t};\ x_0 = 2$

17. $y = x^2 - 2x + 5;\ x_0 = 2$

18. $x = \sin t;\ y = \cos 2t;\ x_0 = \dfrac{1}{2}$

19. $y = \dfrac{x^2 - 3x + 6}{x^2};\ x_0 = 3$

20. $x = 2\ln c\,\mathrm{tg}\, t + 1;\ y = \mathrm{tg}\, t + c\,\mathrm{tg}\, t;\ x_0 = 1$

21. $y = -\sqrt{x} + 2;\ x_0 = 1$

22. $x = \dfrac{3t}{1+t^2};\ y = \dfrac{3t^2}{1+t^2};\ x_0 = 2$

23. $y = \dfrac{x-4}{x-2};\ x_0 = 1$

24. $x = t - \sin t;\ y = 1 - \cos t;\ x_0 = \dfrac{\pi}{2} - 1$

25. $y = \ln(2x+1);\ x_0 = \dfrac{1}{2}$

26. $x = \sin^2 2t;\ y = \cos 2t;\ x_0 = \dfrac{3}{2}$

27. $y = x^3 + 3x^2 - 8;\ x_0 = 2$

28. $x = t^2 - 3t + 4;\ y = t^3 - 4t - 5;\ x_0 = 2$

29. $y = x^3 - 3x^2 + 9x - 1;\ x_0 = 1$

30. $x = t\cos t;\ y = t\sin t;\ x_0 = \dfrac{\pi}{3}$

Задание 3.4

Исследовать функцию и построить ее график.

1. $y=\dfrac{x}{1+x^2}$ 2. $y=\dfrac{1}{1-x^2}$ 3. $y=\dfrac{x^2}{x^2-1}$

4. $y=\dfrac{1}{x}+4x^2$ 5. $y=x^2+\dfrac{1}{x^2}$ 6. $y=\dfrac{2x-1}{(x-1)^2}$

7. $y=\dfrac{x^3}{3-x^2}$ 8. $y=\dfrac{x^3}{2(x+1)^2}$ 9. $y=\dfrac{x^3}{x-1}$

10. $y=\dfrac{x^4}{x^3-1}$ 11. $y=\dfrac{(x-1)^2}{(x+1)^3}$ 12. $y=\dfrac{x^3+2x^2+7x-3}{2x^2}$

13. $y=xe^{-x}$ 14. $y=x^2e^{-x}$ 15. $y=xe^{x}$

16. $y=x-\ln(x+1)$ 17. $y=\ln\left(x^2+1\right)$ 18. $y=x^2e^{-x^2}$

19. $y=x^3e^{-x}$ 20. $y=xe^{-\frac{x^2}{2}}$ 21. $y=\sqrt{(1-x)^3}$

22. $y=2x^3-6x^2-18x+7$ 23. $y=x+\dfrac{1}{x}$ 24. $y=x\sqrt{2-x^2}$

25. $y=x^3-5x^2+3x-5$ 26. $y=x^4-12x^3+48x^2-50$ 27. $y=\sqrt{x^3-2x^2}$

28. $y=\dfrac{x}{x^3+2}$ 29. $y=\sqrt[3]{x^3-3x}$ 30. $y=e^{2x-x^2}$

Задание 3.5

Найти наибольшее и наименьшее значения функции на данном отрезке.

1. $y=x^4-2x^2+5;\ x\in[-2,2]$ 2. $y=\dfrac{4-x^2}{4+x^2};\ x\in[-1,3]$

3. $y=x+2\sqrt{x};\ x\in[0,4]$ 4. $y=x^2\ln x;\ x\in[1,e]$

5. $y=x^5-5x^4+5x^3+1;\ x\in[-1,2]$ 6. $y=x+\sqrt{x};\ x\in[0,4]$

7. $y=x^3-3x^2+6x-2;\ x\in[-1,1]$ 8. $y=\sqrt{9-x^2};\ x\in[-3,3]$

9. $y=\sqrt{100-x^2};\ x\in[-6,8]$ 10. $y=x-2\ln x;\ x\in[1,e]$

11. $y=x-2\operatorname{arctg}x;\ x\in\left[0,\sqrt{3}\right]$ 12. $y=\dfrac{1-x+x^2}{1+x-x^2};\ x\in[0,1]$

13. $y = x + \dfrac{1}{x};\ x \in \left[\dfrac{1}{2}, 10\right]$

14. $y = x e^{x};\ x \in [-1, 0]$

15. $y = e^{2x - x^2};\ x \in [-2, 2]$

16. $y = \dfrac{x-1}{x+1};\ x \in [0, 4]$

17. $y = \dfrac{x^4}{x^3 - 1};\ x \in [2, 4]$

18. $y = \sin 2x - x;\ x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$

19. $y = \ln\left(5 - x^2\right);\ x \in [-1, 2]$

20. $y = \sqrt[3]{\left(x^2 - 2x\right)^2};\ x \in [0, 3]$

21. $y = \operatorname{arctg}\dfrac{1-x}{1+x};\ x \in [0, 1]$

22. $y = x\sqrt{9 - x^2};\ x \in \left[\sqrt{5}, 3\right]$

23. $y = x^3 e^{-x};\ x \in [-1, 4]$

24. $y = x - \ln(2 + x);\ x \in [-1, 1]$

25. $y = -x^2 \sqrt{x^2 + 2};\ x \in [-1, 1]$

26. $y = \sqrt[3]{x^3 3x^2 + 8};x \in [-1, 3]$

27. $y = \dfrac{x}{\ln x};\ x \in [2, 3]$

28. $y = x\sqrt{2 - x^2};\ x \in \left[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right]$

29. $y = \dfrac{x^4}{(x-1)^3};\ x \in \left[-2, \dfrac{1}{2}\right]$

30. $y = 1 - e^{-x^2};\ x \in [-1, 2]$