

**Контрольные задания по темам:  
"Неопределенный интеграл", "Определенный интеграл", "Функции нескольких  
переменных", "Дифференциальные уравнения"**

**Вариант 1 (16)**

I. Найти первообразную:

1)  $\int \frac{dx}{x\sqrt{4-\ln^2 x}}$ ; 2)  $\int \frac{\operatorname{arctg}^3 x}{1+x^2} dx$ ; 3)  $\int x \sin \frac{x}{2} dx$ ; 4)  $\int \frac{5x+7}{x^2+2x+10} dx$ ; 5)  $\int \cos^5 x \sin x dx$ .

II. Вычислить определенные интегралы:

1)  $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x dx$ ; 2)  $\int_{-1}^3 (4x^3 - 8x + 1) dx$ .

III. Вычислить площадь:

1)  $y = -x^2 + 4x$ ,  $y = 2x$ ; 2)  $\rho = 6 \cos 3\varphi$ .

IV. Найти длину дуги линии:

$$\begin{cases} x = 5(t - \sin t), \\ y = 5(1 - \cos t), \end{cases} \text{ если } 0 \leq t \leq \pi.$$

V. Найти область определения функции:

$$z = \sqrt{x+y} + \sqrt{x-y}.$$

VI. Составить уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности:

$$z = 2x^3 + 3y^2 - 8x + 4y \text{ в точке } M_0(1;1;1).$$

VII. Найти  $z'_x$  и  $z'_y$ , если  $z = \ln(x^2 + y^2)$ .

VIII. Исследовать функцию на экстремум:

$$z = -x^2 + 6xy - 12y^2 - 24x + 48y.$$

IX. Решить дифференциальные уравнения:

1)  $xy dx + (x+1)dy = 0$ ; 2)  $(x+2y)dx = x dy$ , если  $y(1) = 0$ ;  
3)  $y'' + 4y' + 3y = (2x+5)e^x$ .

X. Решить систему дифференциальных уравнений: 
$$\begin{cases} \dot{x} = x + 5y, \\ \dot{y} = -x - 3y. \end{cases}$$

## Вариант 2 (17)

I. Найти первообразную:

$$1) \int \sin^3 x \cos x dx; 2) \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)} \arcsin x}; 3) \int \ln^2 x dx; 4) \int \frac{4x+1}{x^2-6x+8} dx; 5) \int \frac{dx}{3+\sqrt{9+x}}.$$

II. Вычислить определенные интегралы:

$$1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx; 2) \int_{-1}^2 (3x^2 + 6x - 5) dx.$$

III. Вычислить площадь:

$$1) y = \frac{x^2}{2}, y = 0, x = 2, x = 4; 2) \rho = 4 \sin 2\varphi.$$

IV. Найти длину дуги линии:

$$\begin{cases} x = 2 \cos t - \cos 2t, \\ y = 2 \sin t - \sin 2t, \end{cases} \text{ если } 0 \leq t \leq \pi.$$

V. Найти область определения функции:

$$z = \ln(y^2 - x + 2).$$

VI. Составить уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности:

$$z = -8x^2 + 10y^2 + x - 5y \text{ в точке } M_0(2; 1; -25).$$

VII. Найти  $z'_x$  и  $z'_y$ , если  $z = e^{\frac{y}{x}}$ .

VIII. Исследовать функцию на экстремум:

$$z = 4x^2 - 8xy + 6y^2 - 16x + 24y + 5.$$

IX. Решить дифференциальные уравнения:

$$1) \sqrt{y^2 - 9} dx = x y dy; 2) 2x^3 y' = y(2x^2 - y^2), \text{ если } y(1) = 1; 3) y'' + 2y' + y = 4x - 15.$$

X. Решить систему дифференциальных уравнений: 
$$\begin{cases} \dot{x} = x + y, \\ \dot{y} = -10x - y. \end{cases}$$

### Вариант 3 (18)

I. Найти первообразную:

$$1) \int e^{\arcsin x} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}; 2) \int \sin^5 x dx; 3) \int x e^{-2x} dx; 4) \int \frac{5x+4}{x^2-8x+20} dx; 5) \int \frac{dx}{x \ln^3 x}.$$

II. Вычислить определенные интегралы:

$$1) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 3x dx; 2) \int_{-2}^1 (6x^2 - 8x + 3) dx.$$

III. Вычислить площадь:

$$1) y = -x^2 + 4x - 3, y = 0; 2) \rho = 3 \cos 4\varphi.$$

IV. Найти длину дуги линии:

$$\begin{cases} x = \cos t + t \sin t - \frac{t^2}{2} \cos t, \\ y = \sin t - t \cos t - \frac{t^2}{2} \sin t, \end{cases} \text{ если } 0 \leq t \leq 1.$$

V. Найти область определения функции:

$$z = \arcsin \frac{x+1}{y}.$$

VI. Составить уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности:

$$z = 2x^3 + 3y^4 - 8x + 5y \text{ в точке } M_0(-2; 1; 8).$$

VII. Найти  $z'_x$  и  $z'_y$ , если  $z = \sin^2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)$ .

VIII. Исследовать функцию на экстремум:

$$z = x^2 - 4xy + 12y^2 - 8x + 16y + 4.$$

IX. Решить дифференциальные уравнения:

$$1) y' = \frac{\cos^2 y}{9+x^2}; 2) y'(x^2 + y^2) = 2xy, \text{ если } y(1) = 2; 3) y'' + 2y' + 10y = 3 \sin x.$$

X. Решить систему дифференциальных уравнений: 
$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + y, \\ \dot{y} = 3x + 4y. \end{cases}$$

### Вариант 4 (19)

I. Найти первообразную:

- 1)  $\int \frac{\operatorname{tg}^7 x + 5}{\cos^2 x} dx$ ; 2)  $\int (4x + 3) \cos x dx$ ; 3)  $\int e^{3 \sin x} \cos x dx$ ; 4)  $\int \frac{5x - 19}{x^2 + 2x + 17} dx$ ;  
5)  $\int \sin^7 x dx$ .

II. Вычислить определенные интегралы:

- 1)  $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin 4x dx$ ; 2)  $\int_{-2}^2 (3x^2 + 2x - 15) dx$ .

III. Вычислить площадь:

- 1)  $y = e^x$ ,  $y = 0$ ,  $x = 1$ ,  $x = 2$ ; 2)  $\rho = 6 \sin 4\varphi$ .

IV. Найти длину дуги линии:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}(t^2 - 2t), \\ y = \frac{1}{3}(t-1)^3, \end{cases} \text{ если } 1 \leq t \leq 2.$$

V. Найти область определения функции:

$$z = \sqrt{4 - x^2 - y^2} + \sqrt{x}.$$

VI. Составить уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности:

$$z = 6x^2 + 4y^2 - 2x + 8y \text{ в точке } M_0(3; -2; 48).$$

VII. Найти  $z'_x$  и  $z'_y$ , если  $z = \cos^3(2^{xy})$ .

VIII. Исследовать функцию на экстремум:

$$z = -12x^2 + 4xy - 16y^2 + 24x - 18y.$$

IX. Решить дифференциальные уравнения:

- 1)  $y'(1 - x^2) = 2xy^2$ ; 2)  $xy' - y = x \operatorname{tg} \frac{y}{x}$ , если  $y(1) = \frac{\pi}{6}$ ; 3)  $y'' + 7y' - 8y = 4e^x$ .

X. Решить систему дифференциальных уравнений: 
$$\begin{cases} \dot{x} = x - 3y, \\ \dot{y} = 3x + y. \end{cases}$$

## Вариант 5 (20)

I. Найти первообразную:

- 1)  $\int \frac{5 + \arcsin^3 x}{\sqrt{1-x^2}} dx$ ; 2)  $\int \cos^8 x \sin x dx$ ; 3)  $\int (3x+2) \sin x dx$ ; 4)  $\int \frac{8x-15}{x^2-6x+13} dx$ ;  
5)  $\int \frac{dx}{\operatorname{tg}^4 x \sin^2 x}$ .

II. Вычислить определенные интегралы:

- 1)  $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{12}} \cos 6x dx$ ; 2)  $\int_{-4}^3 (8x+1) dx$ .

III. Вычислить площадь:

- 1)  $y = (x+1)^2$ ,  $y = 2x+2$ ; 2)  $\rho = 1 + \cos \varphi$ .

IV. Найти длину дуги линии:

$$\begin{cases} x = \ln t, \\ y = \arcsin t, \end{cases} \text{ если } \frac{1}{2} \leq t \leq 1.$$

V. Найти область определения функции:

$$z = \ln(9 - x^2 - y^2) + \sqrt{y}.$$

VI. Составить уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности:

$$z = x^3 \ln y + y^3 \ln x + 7 \text{ в точке } M_0(1;1;7).$$

VII. Найти  $z'_x$  и  $z'_y$ , если  $z = \operatorname{arctg}(\sqrt{x} y)$ .

VIII. Исследовать функцию на экстремум:

$$z = -4x^2 + xy - y^2 + 4x - 8y + 4.$$

IX. Решить дифференциальные уравнения:

- 1)  $2x^2 y y' + y^2 = 4$ ; 2)  $x y' = y - x e^{\frac{y}{x}}$ , если  $y(1) = 1$ ; 3)  $y'' - y' = 4x + 3$ .

X. Решить систему дифференциальных уравнений: 
$$\begin{cases} \dot{x} = -5x + y, \\ \dot{y} = -20x - y. \end{cases}$$

## Вариант 6 (21)

I. Найти первообразную:

$$1) \int \frac{dx}{(1+x^2) \operatorname{arctg} x}; 2) \int \frac{\sqrt{x-1}}{2+\sqrt{x-1}} dx; 3) \int e^x x^2 dx; 4) \int \frac{7x-3}{x^2+8x+12} dx; 5) \int \frac{\sin x dx}{9-\cos^2 x}.$$

II. Вычислить определенные интегралы:

$$1) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left( \sin \frac{x}{2} + 3 \cos \frac{x}{3} \right) dx; 2) \int_{-3}^2 (6x+7) dx.$$

III. Вычислить площадь:

$$1) y = \frac{x^2}{2}, y = \frac{x}{2} + 1; 2) \rho = 4 \cos 6\varphi.$$

IV. Найти длину дуги линии:

$$\begin{cases} x = 3(\cos t + t \sin t), \\ y = 3(\sin t - t \cos t), \end{cases} \text{ если } 0 \leq t \leq 2.$$

V. Найти область определения функции:

$$z = \arcsin \frac{y+2}{x}.$$

VI. Составить уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности:

$$z = 5\sqrt{x^2 + y^2} - xy \text{ в точке } M_0(3; 4; 13).$$

VII. Найти  $z'_x$  и  $z'_y$ , если  $z = \ln(\sin^2 x + \cos^2 y)$ .

VIII. Исследовать функцию на экстремум:

$$z = 2x^2 - 8xy + 6y^2 - 4x - 2y.$$

IX. Решить дифференциальные уравнения:

$$1) y - xy' = 1 + x^2 y'; 2) y' = -\frac{x+y}{y}, \text{ если } y(1) = \frac{1}{2}; 3) y'' - 8y' + 20y = 8x + 15.$$

X. Решить систему дифференциальных уравнений: 
$$\begin{cases} \dot{x} = -3x - y, \\ \dot{y} = 5x + y. \end{cases}$$

### Вариант 7 (22)

I. Найти первообразную:

1)  $\int \frac{\cos x dx}{16 + \sin^2 x}$ ; 2)  $\int \frac{dx}{x\sqrt{2x+3}}$ ; 3)  $\int x \ln(x+5) dx$ ; 4)  $\int \frac{8x-13}{x^2+4x+40} dx$ ; 5)  $\int e^{\operatorname{ctg} x} \frac{dx}{\sin^2 x}$ .

II. Вычислить определенные интегралы:

1)  $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{2\pi} \left( \sin 2x + \cos \frac{x}{3} \right) dx$ ; 2)  $\int_{-1}^2 (8x+21) dx$ .

III. Вычислить площадь:

1)  $y = -x^2 + 3x - 2$ ,  $y = x - 2$ ; 2)  $\rho = 1 - \cos \varphi$ .

IV. Найти длину дуги линии:

$$\begin{cases} x = 2 \cos t - \cos 2t, \\ y = 2 \sin t - \sin 2t, \end{cases} \text{ если } 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}.$$

V. Найти область определения функции:

$$z = \sqrt{4 + x^2 - y} + \sqrt{x}.$$

VI. Составить уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности:

$$z = x^3 + y^3 + 9x + 12y \text{ в точке } M_0(1; -1; -3).$$

VII. Найти  $z'_x$  и  $z'_y$ , если  $z = \sin^3 \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right)$ .

VIII. Исследовать функцию на экстремум:

$$z = -4x^2 + 6xy - 6y^2 + 12x - 12y + 5.$$

IX. Решить дифференциальные уравнения:

1)  $y y' = \frac{1-2x}{y}$ ; 2)  $x y' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$ , если  $y(1) = \frac{\pi}{2}$ ; 3)  $y'' - 9y = 6x e^x$ .

X. Решить систему дифференциальных уравнений:  $\begin{cases} \dot{x} = 5x + 8y, \\ \dot{y} = 3x + 3y. \end{cases}$

### Вариант 8 (23)

I. Найти первообразную:

$$1) \int \frac{3 \operatorname{ctg}^4 x + 10}{\sin^2 x} dx; \quad 2) \int \frac{dx}{1 + \sqrt{2x+5}}; \quad 3) \int x \cos \frac{x}{3} dx; \quad 4) \int \frac{6x-7}{x^2-4} dx; \quad 5) \int x^2 (1+x^3)^5 dx.$$

II. Вычислить определенные интегралы:

$$1) \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos^2 \frac{x}{2} dx; \quad 2) \int_{-3}^2 (4x+7) dx.$$

III. Вычислить площадь:

$$1) y = x^2 - 6x + 5, \quad y = -2x + 2; \quad 2) \rho = 3(1 - \cos \varphi).$$

IV. Найти длину дуги линии:

$$\begin{cases} x = e^t (\sin t + \cos t), \\ y = e^t (\cos t - \sin t), \end{cases} \text{ если } 0 \leq t \leq 1.$$

V. Найти область определения функции:

$$z = \ln(\sqrt{x+1} - y).$$

VI. Составить уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности:

$$z = x^3 + 6xy^2 - 4x + 7y \text{ в точке } M_0(2; -1; -1).$$

VII. Найти  $z'_x$  и  $z'_y$ , если  $z = \operatorname{ctg}^2(\ln x + \ln y)$ .

VIII. Исследовать функцию на экстремум:

$$z = x^3 + y^3 - 3xy.$$

IX. Решить дифференциальные уравнения:

$$1) \frac{yy'}{x} = \frac{y+3}{\sqrt{1+x^2}}; \quad 2) y' = \frac{y}{x}, \text{ если } y(e) = e^2; \quad 3) y'' - y' = 7 \sin x + 5 \cos x.$$

X. Решить систему дифференциальных уравнений: 
$$\begin{cases} \dot{x} = x + 2y, \\ \dot{y} = 4x + 3y. \end{cases}$$



### Вариант 9 (24)

I. Найти первообразную:

1)  $\int x e^{x^2} dx$ ; 2)  $\int \frac{\sqrt{x+4} dx}{1+\sqrt{x+4}}$ ; 3)  $\int \ln^2 x dx$ ; 4)  $\int \frac{8x-16}{x^2+2x-8} dx$ ; 5)  $\int x \sin(3x^2+1) dx$ .

II. Вычислить определенные интегралы:

1)  $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \sin^3 x \cos x dx$ ; 2)  $\int_{-3}^1 (6x+5) dx$ .

III. Вычислить площадь:

1)  $y = x^2 - 2x - 4$ ,  $y = -x^2$ ; 2)  $\rho = 7 \cos 2\varphi$ .

IV. Найти длину дуги линии:

$$\begin{cases} x = (t^2 - 2) \sin t + 2t \cos t, \\ y = (2 - t^2) \cos t + 2t \sin t, \end{cases} \text{ если } 0 \leq t \leq \pi.$$

V. Найти область определения функции:

$$z = \ln(xy) + \sqrt{x} + \sqrt{y}.$$

VI. Составить уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности:

$$z = 4x^2 y^2 - 7x - 9y \text{ в точке } M_0(3; 1; 6).$$

VII. Найти  $z'_x$  и  $z'_y$ , если  $z = \cos(2^{xy})$ .

VIII. Исследовать функцию на экстремум:

$$z = x^2 + y^2 - 8x - 10y + 7.$$

IX. Решить дифференциальные уравнения:

1)  $x(1+y^2)dx = y(1+x^2)dy$ ; 2)  $y' = \frac{y}{x} + \sin \frac{y}{x}$ , если  $y(1) = \frac{\pi}{2}$ ; 3)  $y'' + 4y' + 4y = 2xe^{-x}$ .

X. Решить систему дифференциальных уравнений: 
$$\begin{cases} \dot{x} = -x - y, \\ \dot{y} = 4x - 5y. \end{cases}$$

### Вариант 10 (25)

I. Найти первообразную:

1)  $\int \frac{dx}{x \ln^2 x}$ ; 2)  $\int x^2 e^{-x^3} dx$ ; 3)  $\int (3x-1) \cos \frac{x}{2} dx$ ; 4)  $\int \frac{3x+10}{x^2+3x+2} dx$ ; 5)  $\int \frac{2x+7}{1+\sqrt{x+5}} dx$ .

II. Вычислить определенные интегралы:

1)  $\int_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} \left( \sin 2x + 3 \cos \frac{x}{2} \right) dx$ ; 2)  $\int_{-2}^1 (4x+1) dx$ .

III. Вычислить площадь:

1)  $y = 6 - x - 2x^2$ ,  $y = x + 2$ ; 2)  $\rho = 4 \sin \varphi$ .

IV. Найти длину дуги линии:

$$\begin{cases} x = t \sin 2t, \\ y = t \cos 2t, \end{cases} \text{ если } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}.$$

V. Найти область определения функции:

$$z = \sqrt{x-4} + \sqrt{1-y}.$$

VI. Составить уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности:

$$z = -\frac{\sqrt{3x^2 + y^2}}{6} \text{ точке } M_0 \left( 1; 1; -\frac{1}{3} \right).$$

VII. Найти  $z'_x$  и  $z'_y$ , если  $z = \operatorname{arctg}(x\sqrt{y})$ .

VIII. Исследовать функцию на экстремум:

$$z = -4x^2 + 4xy - 6y^2 + 8x + 6y.$$

IX. Решить дифференциальные уравнения:

1)  $y \arcsin x dx = \sqrt{1-x^2} (1+y) dy$ ; 2)  $y' = \frac{xy + y^2}{x^2}$ , если  $y(1) = 1$ ;

3)  $y'' - 12y' + 20y = 4x^2 + 3x - 5$ .

X. Решить систему дифференциальных уравнений:  $\begin{cases} \dot{x} = 5x + 4y, \\ \dot{y} = 2x + 3y. \end{cases}$

## Вариант 11 (26)

I. Найти первообразную:

- 1)  $\int \frac{dx}{(x+1)\ln^3(x+1)}$ ; 2)  $\int \frac{\sqrt{x-3}}{1+\sqrt{x-3}} dx$ ; 3)  $\int x \cos \frac{x}{3} dx$ ; 4)  $\int \frac{3x+5}{x^2+4x+5} dx$ ;  
5)  $\int e^{\cos x} \sin x dx$ .

II. Вычислить определенные интегралы:

- 1)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx$ ; 2)  $\int_{-2}^3 (4x+9) dx$ .

III. Вычислить площадь:

- 1)  $y = x^2 - 2x$ ,  $y = x$ ; 2)  $\rho = 3 \cos 4\varphi$ .

IV. Найти длину дуги линии:

$$\begin{cases} x = 3 \cos t - \cos 3t, \\ y = 3 \sin t - \sin 3t, \end{cases} \text{ если } 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}.$$

V. Найти область определения функции:

$$z = \sqrt{9 - x^2 - y^2} + \sqrt{x} + \sqrt{-y}.$$

VI. Составить уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности:

$$z = 2^{x^2+y^2} \text{ точке } M_0(1;1;4).$$

VII. Найти  $z'_x$  и  $z'_y$ , если  $z = x^3 e^{-y^2} + y^3 e^{-x^2}$ .

VIII. Исследовать функцию на экстремум:

$$z = x^2 - 8xy + y^2 + 4x - 16y.$$

IX. Решить дифференциальные уравнения:

- 1)  $y' = \frac{2xy}{x^2+9}$ ; 2)  $y' = \frac{x+y}{x-y}$ , если  $y(1) = 0$ ; 3)  $y'' + 4y' + 3y = 8x + 5$ .

X. Решить систему дифференциальных уравнений: 
$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + y, \\ \dot{y} = -x + 4y. \end{cases}$$

## Вариант 12 (27)

I. Найти первообразную:

$$1) \int 4x \sin(2x^2 + 3) dx; 2) \int \frac{\sqrt{x}}{9 + \sqrt{x}} dx; 3) \int \frac{\operatorname{arctg}^5 x}{1 + x^2} dx; 4) \int \frac{5x - 8}{x^2 + 6x + 25} dx; 5) \int x e^{-2x} dx.$$

II. Вычислить определенные интегралы:

$$1) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \sin 3x dx; 2) \int_{-2}^2 (3x^2 - 4x + 1) dx.$$

III. Вычислить площадь:

$$1) y = \frac{x^2}{2}, y = -2x; 2) \rho = 6 \sin 3\varphi.$$

IV. Найти длину дуги линии:

$$\begin{cases} x = e^t \cos t, \\ y = e^t \sin t, \end{cases} \text{ если } 0 \leq t \leq 1.$$

V. Найти область определения функции:

$$z = \arcsin \frac{x + y}{3}.$$

VI. Составить уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности:

$$z = x^3 - y^3 + 9xy \text{ в точке } M_0(1; 1; 9).$$

VII. Найти  $z'_x$  и  $z'_y$ , если  $z = \ln(e^{x^2} + e^{y^2})$ .

VIII. Исследовать функцию на экстремум:

$$z = -4x^2 + 8xy - 12y^2 + 24x - 48y.$$

IX. Решить дифференциальные уравнения:

$$1) (e^x + 1) = (e^y - 1)y'; 2) y' = \frac{y}{x} + \cos^2 \frac{y}{x}, \text{ если } y(1) = \frac{\pi}{4}; 3) y'' - 4y' = 2x + 10.$$

X. Решить систему дифференциальных уравнений: 
$$\begin{cases} \dot{x} = -x + 8y, \\ \dot{y} = x + y. \end{cases}$$

### Вариант 13 (28)

I. Найти первообразную:

$$1) \int \frac{\cos dx}{\sqrt{16 - \sin^2 x}}; 2) \int e^{\sqrt{x}} dx; 3) \int \sin^3 x dx; 4) \int \frac{8x+5}{x^2+4x-5} dx; 5) \int x e^{-2x} dx.$$

II. Вычислить определенные интегралы:

$$1) \int_{-\pi}^{2\pi} \cos \frac{x}{2} dx; 2) \int_{-3}^1 (8x+7) dx.$$

III. Вычислить площадь:

$$1) y = -x^2 + 4x, y = 0; 2) \rho = 3 \cos 4\varphi.$$

IV. Найти длину дуги линии:

$$\begin{cases} x = 2 \cos^3 t, \\ y = 2 \sin^3 t, \end{cases} \text{ если } 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}.$$

V. Найти область определения функции:

$$z = \sqrt{4-x^2} + \sqrt{9-y^2}.$$

VI. Составить уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности:

$$z = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ точке } M_0(3;4;5).$$

VII. Найти  $z'_x$  и  $z'_y$ , если  $z = \operatorname{tg}^2 \frac{y}{x}$ .

VIII. Исследовать функцию на экстремум:

$$z = x^2 - 2xy + 6y^2 + 10x + 18y.$$

IX. Решить дифференциальные уравнения:

$$1) y' = \cos 3x \sin^2 y; 2) y' = e^{2x-y}, \text{ если } y(0) = 0; 3) y'' + y' = 4x + 15.$$

X. Решить систему дифференциальных уравнений: 
$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + y, \\ \dot{y} = 3x + 4y. \end{cases}$$

## Вариант 14 (29)

I. Найти первообразную:

1)  $\int (x^3 + 5)^{10} x^2 dx$ ; 2)  $\int x^2 e^x dx$ ; 3)  $\int \cos^3 x dx$ ; 4)  $\int \frac{6x+11}{x^2-8x+15} dx$ ; 5)  $\int \frac{\sqrt{x+2}}{1+\sqrt{x+2}} dx$ .

II. Вычислить определенные интегралы:

1)  $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{2}} \sin 2x dx$ ; 2)  $\int_{-1}^2 (8x+1) dx$ .

III. Вычислить площадь:

1)  $y = -2x^2 + 4x$ ,  $y = -2x$ ; 2)  $\rho = \sin \varphi$ .

IV. Найти длину дуги линии:

$$\begin{cases} x = \operatorname{arctg} \frac{t}{2}, \\ y = \frac{1}{2} \ln(4+t^2), \end{cases} \text{ если } 0 \leq t \leq 1.$$

V. Найти область определения функции:

$$z = \ln(y - 2 + \sqrt{x}).$$

VI. Составить уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности:

$$z = 2x^2 + 5y^2 - 8x + 17 \text{ точке } M_0(2; 1; 14).$$

VII. Найти  $z'_x$  и  $z'_y$ , если  $z = \arcsin \sqrt{1-x^2-y^2}$ .

VIII. Исследовать функцию на экстремум:

$$z = x^2 + y^2 - 8x - 4y.$$

IX. Решить дифференциальные уравнения:

1)  $(xy+x)dx + (xy+y)dy = 0$ ; 2)  $y' = -\frac{2x}{y}$ , если  $y(1) = 2$ ; 3)  $y'' + 8y' + 15y = \sin x$ .

X. Решить систему дифференциальных уравнений: 
$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x. \end{cases}$$

### Вариант 15 (30)

I. Найти первообразную:

1)  $\int \frac{dx}{(1+x^2)\operatorname{arctg}^2 x}$ ; 2)  $\int \ln(1+x) dx$ ; 3)  $\int \sin x \cos^7 x dx$ ; 4)  $\int \frac{3x+10}{x^2+6x+25} dx$ ; 5)  $\int \frac{\sqrt{x+7}}{1+\sqrt{x+7}} dx$ .

II. Вычислить определенные интегралы:

1)  $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sin \frac{x}{2} dx$ ; 2)  $\int_{-3}^1 (2x+13) dx$ .

III. Вычислить площадь:

1)  $y = x^2 + 6x$ ,  $y = 4x$ ; 2)  $\rho = 2 \cos 2\varphi$ .

IV. Найти длину дуги линии:

$$\begin{cases} x = t \sin 3t, \\ y = t \cos 3t, \end{cases} \text{ если } -1 \leq t \leq 0.$$

V. Найти область определения функции:

$$z = \sqrt{x^2 + y^2 - 1} + \sqrt{x} + \sqrt{y}.$$

VI. Составить уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности:

$$z = xy + \sqrt{x^2 + y^2} \text{ точке } M_0(3; 4; 17).$$

VII. Найти  $z'_x$  и  $z'_y$ , если  $z = \operatorname{ctg}(x^y)$ .

VIII. Исследовать функцию на экстремум:

$$z = -2x^2 - 8y^2 + 4xy + 16x - 32y.$$

IX. Решить дифференциальные уравнения:

1)  $y' = \frac{x^2+5}{\sin 4y}$ ; 2)  $y' = \frac{y}{x} + \sin^2 \frac{y}{x}$ , если  $y(1) = \frac{\pi}{4}$ ; 3)  $y'' - 9y = 6e^{3x}$ .

X. Решить систему дифференциальных уравнений: 
$$\begin{cases} \dot{x} = x + 2y, \\ \dot{y} = 3x + 2y. \end{cases}$$